keréknyomok

2013/7. SZÁM ORIENTALISZTIKAI ÉS BUDDHOLÓGIAI FOLYÓIRAT

Tartalom

MOLNÁR ATTILA

Strukturalista és modális variációk egy formalizált catuṣkoṭira

Lehet-e egy kijelentés egyszerre igaz és nem igaz, hamis és nem hamis? A klasszikus logikában semmiképpen sem, az ind „négycsúcsú" (*catuṣkoṭi*) érvelésekben azonban igen. Mi lehet a viszony a klasszikus és az ind logika között? Hogyan lehet az egyik érveléseit hűen lefordítani a másikéba? E kérdések pontos megválaszolásához szerencsés lenne, ha az ind logikának legalább valamely szegmense – a klasszikus logikához hasonlóan – formalizálható lenne.

Bevezetés

Jelen tanulmány célja a *catuṣkoṭi*, vagy más néven *tetralemma* formális logikai vizsgálata. Mivel a *catuṣkoṭi* – mint a kijelentések kapcsán felmerülő négyértékűség – lényegénél fogva szétfeszíti a klasszikus logikai kereteket, ennek vizsgálatához két nem klasszikus logikát mutatunk be.

Az ún. *modális logika* egy, a klasszikus logikánál bővebb logika: a szokásos logikai szabályokhoz hozzáveszünk néhány, egy bizonyos modális operátort tartalmazó szabályt. E modális operátornak, vagy röviden *modalitás*nak azt a szerepet szánjuk, hogy a *catuṣkoṭi*ban szereplő igazságpredikátumot mint (a klasszikus) igazság egy *módját* értelmezze.

Az ún *duális intuicionista logika* ezzel szemben a klasszikus logikánál kevesebb szabállyal bíró, más szóval általánosabb logika. A *catuṣkoṭi* formalizálására ez azért tűnik alkalmasnak, mert két, nem ekvivalens tagadásfogalommal is bír.[1] Ez a magyar nyelvtől sem idegen, vegyük például a következő kétszeresen tagadott mondatokat:

Hamis, hogy nem p. *Nem hamis, hogy p.*

A különbségnek az tűnik, hogy az első valaminek a *lehetetlenségére*, a második pedig másvalaminek a *lehetőségére* utal. E két tagadásfogalom teszi lehetővé, hogy a klasszikus logikába nem illeszkedő harmadik és negyedik kótit úgy fordítsuk, hogy azok lehetséges, akár kizáró alternatívái lehessenek az állító és tagadó első két kótinak. Bemutatjuk, hogy e logika segítségével jobban formalizálható a *catuṣkoṭi*, mint a korábbi megközelítések logikái által.[2]

A duális intuicionista logika lehetősége a klasszikus logika *strukturalista* felépítésekor adódik, így ezekre is röviden kitérünk. Ennek lényege úgy foglalható össze, hogy a logikát más struktúrákkal való viszonya alapján határozza meg. A duális intuicionista logika és klasszikus logika strukturalista felépítése ugyanakkor azzal az előnnyel is jár, hogy e két logika egymáshoz való viszonya a lehető legvilágosabb lesz. Ez különösen fontos

1 A klasszikus logika esetében a két tagadás ekvivalens.
2 Gondolunk itt elsősorban STAAL 1975 és WESTERHOFF 2010 formalizálásaira. Ezen kísérleteknek egy jó összefoglalását nyújtja PRIEST 2010.

akkor, ha a *catuṣkoṭi* formalizálására nem mint öncélra, hanem mint annak szükséges feltételére tekintünk, hogy meghatározhassuk a tetralemmára és a dilemmára épülő logikák egymáshoz való viszonyát – adott esetben az ind és a klasszikus logika viszonyát.

Először a *catuṣkoṭi* hasonló, számunkra is releváns formalizálási kísérleteit mutatjuk be: Staal és Westerhoff formalizálási kísérleteit, amelyek közül az első az intuicionista logikát, a második pedig a negációk kétféle értelmezhetőségét használja fel a *catuṣkoṭi* formalizálására – A duális intuicionista logikában formalizálható megoldás e két megközelítés egyesítésének lesz majd tekinthető.

Másodszor röviden bemuatjuk Priest *catuṣkoṭi*-értelmezésének heurisztikáját, és belátjuk, hogy ezt az ötletet alkalmazva a minimális modális logika alkalmas a *catuṣkoṭi* formalizálására. A modális logika ismerete jelen írásban egyszer sem lesz előfeltételezve, ezért ebben a szakaszban térünk ki ennek rövid bevezetésére is.

Harmadszor pedig három különböző oldalról mutatjuk be a duális intuicionista logikát. A strukturalista felépítés megmutatja, hogy milyen viszonyban áll más logikákkal, a szintaktikai, levezetési szabályokkal való meghatározás axiómatikus módon adja meg e logika törvényeit, a szemantikai meghatározás pedig azt határozza meg, hogy mi *nem* törvénye a duális intuicionista a duális intuicionista logikának.

Végezetül pedig a *catuṣkoṭi*ban szereplő állításokra támaszkodva bemutatunk egy tetra- és egy pentalemmát. Utóbbit ahhoz hasonlóan, ahogy azt Priest is teszi a formalizálási kísérleteket összefoglaló tanulmányában.

I. A CATUṢKOṬI FORMALIZÁLÁSI KÍSÉRLETEI

Sokan sokféleképpen próbálták formális logikai eszközökkel meghatározni a *catuṣkoṭi*t, ennek egy jó összefoglalását nyújtja Priest[3].

A *catuṣkoṭi*t a továbbiakban érdemes egy formális rejtvénynek tekinteni: Melyek azok a logikák, amelyekre igaz, hogy bennük bármely kijelentés kapcsán a következő lehetőségek közül pontosan az egyik állhat csak fent úgy, hogy egyik sem lehetetlen:

1. Igaz,
2. Hamis (nem igaz),
3. Mindkettő,
4. Egyik sem (nem mindkettő).

Továbbá, felmerül egy igen fontos kérdés: azon logikák, amelyek e rejtvény megoldásait szolgáltatják, miben különböznek a klasszikus logikától? Vagy strukturalista megfogalmazásban: Milyen viszonyban áll a rejtvény megoldásának logikája és a szokásos kétértékű klasszikus logika? Ennek megválaszolására azért van szükség, hogy választ adjunk arra a filozófiai-logikai problémára, hogy miben különböznek a dilemmára és tetralemmára épülő logikai elméletek. A *catuṣkoṭi* formalizálása tehát nem öncél, hanem a második, fontosabb kérdés feltevésének egy szükséges feltétele.

3 Lásd PRIEST 2010.

Először is vegyük szemügyre, hogy klasszikus logikai szempontból mi található a *catuṣkoṭi*ban.

A dilemma vagy a kétértékűség törvénye itt nem más, mint ha eltörölnénk a 3-4. lehetőségeket. A 3. lehetőség eltörlése az ellentmondástalanság törvénye, a 4. lehetőség kizárása pedig a kizárt harmadik törvénye.

Staal (1975) abból indul ki, hogy a kizárt harmadik törvényének nem vallása a modern logikában sem ismeretlen. Az intuicionista logika elutasítja a kizárt harmadik törvényét, hiszen ott – leegyszerűsítő módon fogalmazva – az igazság fogalma alatt a verifikációt értik: egy állítás igaz, ha be van bizonyítva, és hamis, ha meg van cáfolva. Sok állítás esetén azonban az „egyik sem" a helyzet. Elég erős matematikai elméletek esetén pedig ez még akkor is így van, ha „bizonyítható"-ra és „cáfolható"-ra cseréljük a „be van bizonyítva" és „meg van cáfolva" kifejezéseket. Az intuicionista logikában ilyen módon tehát fellelhető egyfajta értékrés, ami alkalmas arra, hogy megsértse a kizárt harmadik törvényét. Staal ötlete alapján a következő *catuṣkoṭi*t állíthatjuk fel[4]:

1. A
2. $\neg A$
3. $A \wedge \neg A$
4. $\neg(A \vee \neg A)$

Továbbra is problémát okoz azonban az ellentmondás törvénye: Az intuicionista logika is elkötelezi magát amellett, hogy egy állítás se lehessen egyszerre bizonyítva és megcáfolva. A harmadik állítás tehát igazából nem is lehetőség, sőt, az ellentmondásra még az intuicionista logikában is igaz, hogy belőle minden más állítás, így a többi kóti is következik. A helyzeten ráadásul nem javít az sem, hogy a negyedik állítás szintén ellentmondás, így ekvivalens a harmadikkal.

Westerhoff (2010) ezzel szemben arra gyanakszik, hogy a *catuṣkoṭi*ban nem ugyanabban az értelemben szerepelnek a negációk. Az egyik negáció *de re*, azaz a dolgokra vonatkozóan, a másik pedig *de dicto* módon, azaz kijelentésekre vonatkozóan tagad.[5] Az „A francia király kopasz" kijelentés tagadása ilyen módon kétféleképpen alakulhat:

A francia király nem kopasz. illetve *Nem igaz, hogy a francia király kopasz.*

A megoldás abban rejlik, hogy az első, *de re* típusú negáció nem elégíti ki a kizárt harmadik törvényét[6]. Az „A francia király kopasz" és az „A francia király nem kopasz" kijelentések mindegyike osztja azt az előfeltevést, hogy létezik egy francia király – ilyen módon mindkettő lehet egyszerre hamis, ha nem létezik francia király. Westerhoff *catuṣkoṭi*ja:

4 Staal maga ilyen formában nem állított föl *catuṣkoṭi*t. A Priest által interpretált megoldás is a kizárt harmadik törvényét a $\neg A \wedge \neg\neg A$ formában tagadta. Ez viszont a lényegen nem változtat, mivel az intuicionista logikában ekvivalens mind az $\neg(A \vee \neg A)$, mind az $A \wedge \neg A$ formulákkal...

5 A *de re* és *de dicto* tagadást az indiai és tibeti logikában *belső* (skt. *paryudāsa*, tib. *ma yin dgag*) és *külső* (skt. *prasajya*, tib. *med dgag*) tagadásként különböztetik meg.

6 Ha úgy vesszük, Staal megoldása is ezen múlt: A „cáfolható, hogy *A*" kijelentés a „bizonyítható, hogy *A*" kijelentés *de re* módon tagadva.

1. A
2. $\neg A$
3. $A\wedge\neg A$
4. $\times(A\vee\neg A)$

Ezzel a probléma persze ugyanaz, mint Staal megoldásával: az ellentmondásból mindegyik másik következik.

Ha mégis találnánk egy olyan megoldást, amellyel $A\wedge\neg A$ nem implikálja az összes formulát a nyelvben, még mindig fennáll az a probléma – már amennyiben a $\wedge$ konnektív egy kicsit is konjunkció-szerűen viselkedik –, hogy az első két esetet az *alakjuk okán* implikálni fogja. Priest erre a következőt javasolja (lényegében azt a trükköt, amelyet majd a saját megoldásában is alkalmaz): A *catuṣkoṭi* első két pontját ne csak úgy értsük, hogy „A igaz" illetve hogy „A hamis", hanem hogy „A igaz és nem hamis" illetve hogy „A hamis és nem igaz". Ezzel a *catuṣkoṭi* a következőre módosul

1. $A\wedge\neg A$
2. $\neg A\wedge\times A$
3. $A\wedge\neg A$
4. $\times(A\vee\neg A)$

Így az, hogy a harmadikból következik-e az első kettő, már a $\times$-re vonatkozó levezetési szabályoktól is függ. A *de re – de dicto* interpretáció alapján azonban minden bizonnyal fennáll a két negáció között egy alá-fölé rendeltségi viszony:

$$\neg A \Rightarrow \times A$$

Ha ugyanis „A francia király nem kopasz" igaz, akkor a „Nem igaz, hogy a francia király kopasz" kijelentés is igaz kell legyen. Ez viszont biztosítja azt, hogy a második kóti $\neg A$ és $\times A$ tagja is következik a harmadik $\neg A$ tagjából, azaz a harmadik esetből következik a második eset. Így a logikai függetlenségi követelmény legalább egyszer sérül – és akkor még nem számoltunk azzal, hogy $\times$A -ra milyen más logikai szabályok vonatkoznak.[7]

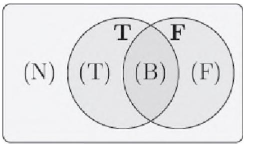
Priest megoldásának ötlete a következő: két operátort vezet be a nyelvbe: **T**A-t és **F**A-t. Ezeket úgy értelmezzük, hogy „igaz, hogy A" illetve „hamis, hogy A". Negációból csak egyet használ, de arról kiköti, hogy $\mathbf{F}A \Leftrightarrow \mathbf{T}\neg A$. A *catuṣkoṭi* így a következőképpen fest:

1. (T) $\mathbf{T}A \wedge \neg\mathbf{F}A$
2. (F) $\neg\mathbf{T}A \wedge \mathbf{F}A$
3. (B) $\mathbf{T}A \wedge \mathbf{F}A$
4. (N) $\neg\mathbf{T}A \wedge \neg\mathbf{F}A$

7 További, részletekbe is bocsátkozó problémákat tár fel még PRIEST 2010.

Ezzel kapcsolatban néhány dolgot érdemes megjegyezni: ha A-ra mint egy kijelentés nevére gondolunk, és az operátorokra pedig mint közönséges predikátumokra, úgy ez egy közönséges igazságtábla a kétértékű logikából, vagy a lehetőségek tere egy kétkörös Venn-diagramban:

kóti	$\mathbf{T}A$	$\mathbf{F}A$
(T)	igaz	hamis
(F)	hamis	igaz
(B)	igaz	igaz
(N)	hamis	hamis



1. ábra: *Igazságtáblázat és Venn-diagram*

Ezáltal Priest képes is adni egy négyértékű szemantikát, amelyben mind a négy kóti lehetséges, egymást páronként kizáró és együttesen kimerítő.

Priest logikája azonban nem a klasszikus logika kibővítése, hanem leszűkítése: ebben a logikában a tagadás nagyságrendekkel gyengébb konnektívum, amely klasszikus feladatait, hogy egy állítás a tagadó párját kizárja, illetve hogy a tagadás kiegészítse az állítást, nem teljesíti. Sőt, ebben a logikában még kondicionális sem értelmezhető a szokásos módon. Ha olyan logikát keresünk, amelyben a konnektívumok a klasszikus módon viselkednek, mégis vannak benne Priest operátoraihoz hasonló affirmatív operátorok, akkor ezeket a logikákat a modális logikák közt kell keresnünk.

Ezért, és mert a továbbiakban mi is támaszkodni fogunk modális szemantikai fogalmakra, érdemes közelebbről is megvizsgálni a nulladrendű modális logika alapfogalmait.

Modális logikai alapfogalmak

Klasszikus nulladrendű modális nyelv alatt a klasszikus nulladrendű nyelv egy egyargumentumú operátorral való bővítését értjük, amelyet általában a $\Box$ jellel jelölünk. Ha tehát A egy (klasszikus vagy modális) kijelentés, úgy $\Box A$-t is annak tekintjük.

Egy ún. *normális* modális levezetési rendszerrel akkor rendelkezünk, ha a klasszikus logika levezetési szabályait mind továbbra is elfogadjuk, és a további két, nagyon egyszerű szabály mellett kötelezzük el magunkat:

- A $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$ alakú kijelentések minden bizonyítás során felhasználhatóak, és
- ha egy A kijelentés bizonyított, úgy $\Box A$ is annak számít.

Ehhez a levezetési rendszerhez adekvát szemantika tartozik, azaz egy olyan halmazelméleti konstrukció, amely pontosan azon állításokat állítja majd egy bizonyos értelemben érvényesnek, amelyeket a rendszer képes levezetni. A szokásos normális modális logikai szemantikákat Kripke-szemantikának vagy „lehetséges világ"-szemantikának nevezik, ezeket mutatjuk be a következőkben.

Modális keretstruktúrának nevezzük a (W, R) rendezett párt, ha W egy tetszőleges halmaz, R pedig egy ezen a halmazon értelmezett két argumentumú reláció. A W elemeit *lehetséges világoknak*, az R-t pedig *alternatívarelációnak* vagy *elérhetőségi relációnak* szokás nevezni. Ha

wRw', úgy azt mondjuk, hogy a w világból elérhető w', vagy a w világnak alternatívája a w'.

Modális logikai modellnek nevezzük a (W, R, v) rendezett hármast, ha v egy olyan függvény, amely minden, konnektíveket és operátort nem tartalmazó kijelentéshez hozzárendeli W-beli világok egy halmazát. Ha egy p atomi mondat esetén $w \in v(p)$, azaz w benne van p-hez rendelt világok halmazában, akkor azt is mondjuk, hogy p igaz a w világban, és ezt a „$w \Vdash p$" kifejezéssel rövidítjük. Tetszőleges, tehát konnektíveket és operátorokat tartalmazó mondatokra a „világban igaz" kifejezést a következőképpen terjesztjük ki:

$w \Vdash \neg A$ $\Leftrightarrow$ nem igaz, hogy $w \Vdash A$

$w \Vdash A \wedge B$ $\Leftrightarrow$ $w \Vdash A$ és $w \Vdash B$

$w \Vdash A \vee B$ $\Leftrightarrow$ $w \Vdash A$ vagy $w \Vdash B$

$w \Vdash A \rightarrow B$ $\Leftrightarrow$ ha $w \Vdash A$, akkor $w \Vdash B$

$w \Vdash \Box A$ $\Leftrightarrow$ Minden w-ből elérhető v világban,

azaz minden olyan v világban, amelyre wRv, $v \Vdash A$.

(Megjegyezzük, hogy a „$w \Vdash A$" alakú kijelentéseknek mindig csak egy rögzített modellben van értelme, így a szóban forgó modellt jelezni kellene a jelölésben, ezt azonban a könnyebb olvashatóság érdekében elhagyjuk.)

Ha egy M modell minden világában igaz egy A formula, akkor azt mondjuk, hogy a formula igaz az M modellben. Ha egy formula minden modellben igaz, akkor azt mondjuk, hogy a formula érvényes.

Példaként belátjuk, hogy a $(\Box A \wedge \Box(A \rightarrow B)) \rightarrow \Box B$ formula bármely A és B kijelentés esetén érvényes: Azt kell belátnunk, hogy ha egy tetszőleges modell tetszőleges w világában igazak az $\Box A$ és $\Box(A \rightarrow B)$ formulák, akkor $\Box B$ is igaz. Az első két formula igazsága miatt minden w-ből elérhető v világban igaz az A és az $A \rightarrow B$ formula is. A klasszikus logikából ismert modus ponens szabály miatt ekkor ebben a v világban igaz kell, hogy legyen a B is, más szóval beláttuk, hogy tetszőleges w-ből elérhető v-ben igaz a B, azaz $\Box B$ már w-ben igaz. Ezt kellett belátnunk.

A Kripke szemantika legfontosabb jellemzője, hogy adekvát a fent említett levezetési rendszerhez: Pontosan azok a formulák számítanak benne érvényesnek, amelyek levezethetőek ebből a levezetési rendszerből.

Modális logikában szokásos egy másik modális operátort is definiálni, amely olyan viszonyban áll a másikkal, mint az egzisztenciális kvantor az univerzális kvantorral:

$\Diamond A \Leftrightarrow \neg\Box\neg A$

Erre $\Vdash$ definíciójából a következő jellemzés adódik:

$w \Vdash \Diamond A$ $\Leftrightarrow$ Van olyan w-ből elérhető v világ, azaz van olyan v világ, amelyre wRv és $v \Vdash A$.

A modális logikai irodalomban gyakori, hogy nem a $\Box$ operátort veszik primitívnek, hanem a $\Diamond$ párját, és ezzel fejezik ki az előbbit.

PRIEST OPERÁTORAI MINT MODÁLIS OPERÁTOROK

Most visszatérhetünk Priest operátoraihoz. Priest szerint $\mathbf{F}A \Leftrightarrow \mathbf{T}\neg A$, azaz $\neg\mathbf{F}A \Leftrightarrow \neg\mathbf{T}\neg A$. Attól függően, hogy a **T**-t melyik modális operátorba ($\Box$ vagy $\Diamond$) fordítjuk, Priest operátorainak fordítása a következőképpen alakulhat:

$$\mathbf{T} = \Box,\qquad \mathbf{F} = \Box\neg,\quad \neg\mathbf{T} = \neg\Box = \Diamond\neg,\qquad \neg\mathbf{F} = \neg\Box\neg = \Diamond$$

vagy

$$\mathbf{T} = \Diamond,\qquad \mathbf{F} = \Diamond\neg,\quad \neg\mathbf{T} = \neg\Diamond = \Box\neg,\qquad \neg\mathbf{F} = \neg\Diamond\neg = \Box$$

Ez alapján a két felírható *catuṣkoṭi*:

1. (T)	$\Box A \wedge \Diamond A$	$\Diamond A \wedge \Box A$
2. (F)	$\Box\neg A \wedge \Diamond\neg A$	$\Diamond\neg A \wedge \Box\neg A$
3. (B)	$\Box A \wedge \Box\neg A$	$\Diamond A \wedge \Diamond\neg A$
4. (N)	$\Diamond\neg A \wedge \Diamond A$	$\Box\neg A \wedge \Box A$

Látható, hogy a két *catuṣkoṭi* között lényegi különbség nincs. A (T) és (F) esetén mindegy, melyik átírást használjuk, a (B)-(N) párt pedig az átírások ugyanazon formulapárhoz rendelik. Annak bizonyítása, hogy a szóban forgó négy modális formula lehet igaz, ugyanakkor egymást kizáró de együtt mégis kimerítő, mindkét *catuṣkoṭi* esetében ugyanazt a bizonyítást eredményezi. A továbbiakban a $\Box$ szerinti átírás alapján utalunk a formulákra.

Még mielőtt bebizonyítjuk hogy ez valóban jó formalizálása a *catuṣkoṭi*nak, bemutatjuk, hogy mi az így formalizált kótik jelentése a Kripke-szemantikában.

(T) $w \Vdash \Box A \wedge \Diamond A$	$\Leftrightarrow$	w-nek léteznek alternatívái, és mindegyikben igaz az A.
(F) $w \Vdash \Box\neg A \wedge \Diamond\neg A$	$\Leftrightarrow$	w-nek léteznek alternatívái, és mindegyikben hamis az A.
(B) $w \Vdash \Box A \wedge \Box\neg A$	$\Leftrightarrow$	w-nek nincsenek alternatívái.
(N) $w \Vdash \Diamond\neg A \wedge \Diamond A$	$\Leftrightarrow$	w-nek létezik legalább két alternatívája:
		Az egyikben igaz, a másikban hamis az A

Így már könnyebben látható, hogy bármelyik kettő kizárja egymást, és a négy együtt kimerítő: egy világnak vagy vannak alternatívái, vagy nincsenek. Az utóbbi esetén, és csak ebben az esetben igaz a (B). Az előbbi esetén ebben a világban (N) vagy igaz, vagy nem. Ha igaz, akkor (T) és (F) egyike sem lehet igaz, ha pedig (N) hamis, akkor (T) és (F) közül pontosan az egyik igaz.

Mivel pedig a szemantika, amit használtunk, adekvát a levezetési rendszerhez, az ennek megfelelő formula le is vezethető.

Ez tehát egy megoldása a *catuṣkoṭi*nak, ha

1. elfogadjuk a *catuṣkoṭi* Priest-féle „igazság-táblás" értelmezését,

2. elfogadjuk a $(\mathbf{T}A \wedge \mathbf{T}(A \rightarrow B)) \rightarrow \mathbf{T}B$ elvet, azaz hogy (a Priest-féle megfogalmazásban) az igazságpredikátum megtartja a modus ponens következtetési szabályt,

3. elfogadjuk azt, hogy egy $\mathbf{T}A$ alakú kijelentés bizonyításához elégséges A bizonyí tása. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a bizonyítás az igazságnál erősebb fogalom abban az értelemben, hogy az előbbiből mindig következik az utóbbi.

Megjegyezzük azonban (ahogyan arra Priest is rámutat), hogy a *catuṣkoṭi*nak ezt a megoldását tönkreteszi a kontrapozíciós szabály és a $\mathbf{T}A \leftrightarrow A$ ún. T-séma (bármelyik irányú) elfogadása.

A továbbiakban, ismervén a modális szemantika alapjait, megvizsgáljuk a két negációs és intuicionista megközelítések „közös nevezőjét", az ún. duális intuicionista logikát, illetve annak strukturalista megalapozását. Nem mellesleg ezzel majd később olyan *catuṣkoṭi* felállítására leszünk képesek, amelyben érvényes a T-séma $\mathbf{T}A \rightarrow A$ iránya és a kontrapozíciós szabály(ok mindegyike).

II. DUÁLIS INTUICIONISTA LOGIKA

STRUKTURALISTA MEGHATÁROZÁS[8]

A továbbiakban a logikára mint egy ún. előrendezésre fogunk tekinteni: A logika tehát elemek (logikai nézőpontból kijelentések) egy F halmaza, melyet minimális mértékben rendez egy $\Rightarrow$ szimbólummal jelölt reláció (logikai nézőpontból következményreláció): ez a reláció ugyanis mindössze relfexív és tranzitív, azaz bármely A, B és C kijelentés esetén

- $A \Rightarrow A$,
- Ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow C$, akkor $A \Rightarrow C$.

Egy előrendezés tehát egy $\mathbf{F} = (F, \Rightarrow)$ relációs struktúra, amelyen a reláció reflexív és tranzitív. Egy $\mathbf{E} = (E, \Rightarrow_E)$ és egy $\mathbf{F} = (F, \Rightarrow_F)$ előrendezés esetén azon $f : E \rightarrow F$, azaz E-ből F-be menő függvényeket, amelyekre igaz, hogy tetszőleges E-beli A és B elemekre

ha $A \Rightarrow_E B$, akkor $f(A) \Rightarrow_F f(B)$,

monoton függvényeknek nevezzük. A monoton függvények tehát a *rendezéstartó* függvények. Ha adott egy $\mathbf{E}$ és egy $\mathbf{F}$ rendezés, köztük pedig egy $f : E \rightarrow F$ és egy $g : F \rightarrow E$ monoton függvény úgy, hogy

$f(A) \Rightarrow_E B$ pontosan akkor, ha $A \Rightarrow_F g(B)$

8 Az itt következő előrendezéses analízis egy általánosabb, kategóriaelméleti analízis speciális esetének tekinthető. A kategóriaelméletről és ennek logikával kapcsolatos alkalmazásairól bővebben lásd: GOLDBLATT 1984, REYES-REYES-ZOLFAGHARI 2004. Kifejezetten az adjunkciókkal való megalapozásért lásd LAWVERE 2006.

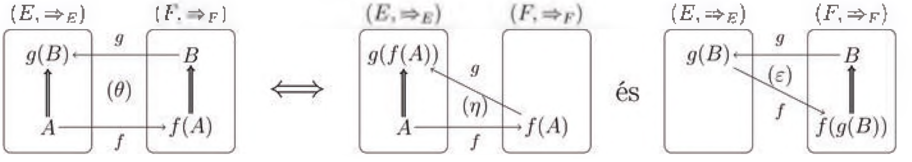
tetszőleges E-beli A és F-beli B esetén, akkor azt mondjuk, hogy az f és g függvények *Galois kapcsolatban* vagy *adjungált szituációban* állnak. Ezt kapcsolatot $f \dashv g$ -vel jelöljük, az f-et *bal oldali*, a g-t *jobb oldali adjungáltnak* nevezzük. Azt mondjuk továbbá, hogy egy $f : E \to F$ monoton függvény *balról (vagy jobbról) adjungált szituációba állítható*, ha van olyan g, amellyel $f \dashv g$ (vagy $g \dashv f$).

Egy ekvivalens definíció is adható az adjungált szituációra:

$f \dashv g$ pontosan akkor, ha $\quad A \Rightarrow_E g(f(A)) \quad$ és $\quad f(g(B)) \Rightarrow_F B$

Az adjungált szituációban megfogalmazott ekvivalenciára a későbbiekben a θ, az $A \Rightarrow_E g(f(A))$ tulajdonságra az ε, a $f(g(B)) \Rightarrow_F B$ a tulajdonságra pedig a η szimbólummal hivatkozunk.

A két ekvivalens definíció megértését a 2 ábra segíti.



2. ábra: *A Galois kapcsolat vagy adjungált szituáció ekvivalens megfogalmazásai*

A továbbiakban használni fogjuk még egy rendezés önmagával való szorzatának a fogalmát. Egy **E** = (E, $\Rightarrow$) előrendezés önmagával való szorzata alatt azt az $\mathbf{E}^2 = (E^2, \Rightarrow^2)$ rendezést értjük, ahol

- E^2 az E-ből képezhető összes rendezett pár halmaza, és
- $(A, B) \Rightarrow^2 (C, D)$ pontosan akkor, ha $A \Rightarrow C$ és $B \Rightarrow D$, azaz ha az eredeti reláció a megfelelő tagok esetében fennáll.

Most már készen állunk arra, hogy meghatározhassunk logikákat azáltal, hogy más előrendezésekkel milyen kapcsolatban állnak.

Az „igaz" és a „hamis"

Hamis alatt olyan $\downarrow$-vel jelölt állítást értünk, amelyből minden állítás következik. Igaz alatt olyan $\uparrow$-vel jelölt állítást értünk, amely minden állításból következik.

Legyen **1** egy olyan előrendezés, amelynek egyetlen eleme van. Ilyenből lényegében egyetlen egy van, mivel bármely két ilyen előrendezés pontosan ugyanolyan: az egyetlen eleme következménye saját magának. A továbbiakban ezért **1**-et egyértelműen meghatározottnak tekintjük.

Világos, hogy bármely **E** előrendezésből mindössze egyetlen függvény létezik, ami **1**-be képezne, az pedig monoton: Ez az a c_E konstans függvény, amely E bármely eleméhez **1** egyetlen elemét rendeli.

Egy **E** előrendezett struktúrában pontosan akkor van hamis elem, ha van olyan $\downarrow$: **1** $\to$

E monoton függvény, amely bal oldali adjungáltja a c_E -nek. A hamis elemeket a c_E bal oldali adjungáltjai jelölik ki.

Egy **E** előrendezett struktúrában pontosan akkor van igaz elem, ha van olyan $\uparrow$: $\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{E}$ monoton függvény, amely jobb oldali adjungáltja a c_E -nek. Az igaz elemeket a c_E jobb oldali adjungáltjai jelölik ki.

Ezen állítások bizonyítását a többi hasonló állítás bizonyításával együtt a 2. táblázatban összegezzük.[9]

Az „… és …" és a „… vagy …"

Egy A és B állítás $A \vee B$ -vel jelölt diszjunkcióján olyan állítást értünk, amely mindkét állításból következik úgy, hogy ez a hasonló tulajdonsággal bíró elemek közül ez a legerősebb is egyben: minden más olyan állítás, amely A-ból és B-ből is következik, $A \vee B$-ből is következik.

Egy A és B állítás $A \wedge B$ -vel jelölt konjunkcióján olyan állítást értünk, amelyből mindkét állítás következik úgy, hogy ez a hasonló tulajdonsággal bíró elemek közül ez a leggyengébb is egyben: minden más olyan állításból, amelyből A is és B is következik, $A \wedge B$ is következik.

Legyen $\mathbf{E}^2$ az **E** rendezés önmagával vett szorzata. A Δ_E: $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}^2$ az ún. diagonális függvény, amely E elemeit „megduplázza": Tetszőleges E-beli A esetén $\Delta_E(A) = (A, A)$.

Egy **E** előrendezett struktúrában pontosan akkor van bármely két elemnek diszjunkciója, ha van olyan $\vee_E$: $\mathbf{E}^2 \rightarrow \mathbf{E}$ monoton függvény, amely bal oldali adjungáltja a Δ_E -nek. Ezeket a diszjunkciókat a Δ_E jobb oldali adjungáltjai jelölik ki.

Egy E előrendezett struktúrában pontosan akkor van bármely két elemnek konjunkciója, ha van olyan $\wedge_E$: $E^2 \rightarrow E$ monoton függvény, amely jobb oldali adjungáltja a Δ_E -nek. Ezeket a konjunkciókat a Δ_E jobb oldali adjungáltjai jelölik ki.

A „ha …, akkor ..." és a „ … kivéve …"

Egy A és B elem $A \rightarrow B$ -vel jelölt kondicionálisa olyan elem, amely a leggyengébb azok közt, amelyek A-val való konjunkciójából következik B: minden más olyan $A \wedge C$ konjunkcióból, amelyből következik B, $A \rightarrow B$ is következik.

Egy B és A elem $B \setminus A$ -val jelölt különbsége olyan elem, amely a legerősebb azok közt, amelyek A-val való diszjunkciójából következik B: minden más olyan $A \vee C$ diszjunkció, amely következik B-ből, $B \setminus A$-ból is következik.

A kivonásra klasszikus környezetben nem használunk külön konnektívumot, ezt általában a $B \wedge {\sim} A$-val fejezzük ki. A halmazalgebrák esetében viszont szokás ilyen műveletet definiálni (és érdekes módon ott éppen hogy a kondicionális szokatlan művelet). Ha a halmazok közötti részhalmazviszonyt következményrelációnak fordítjuk, akkor $B \setminus A$ az a halmaz, amely a legkisebb azok közt, amelyek A-val való uniója kiadja a B-t: minden más olyan $A \cup C$ halmaznak része, amely része B-nek.

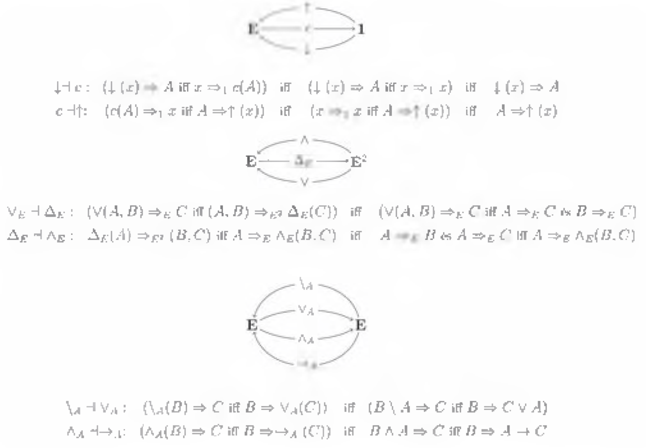
9 Itt a metaelméleti ekvivalenciát sajnos az angol „iff" kifejezéssel kellett jelöljük, mivel az erre használatos szokásos szimbólumokat már elhasználtuk a tárgynyelvi ekvivalenciára és a szekvensjelekre.

Legyenek $\wedge_{E,A}$ és $\vee_{E,A}$ azon $E \to E$ függvények, amelyekre

$\wedge_{E,A}(B) = \wedge_E(B,A)$ és $\vee_{E,A}(B) = \vee_E(B,A)$.

Egy **E** előrendezett struktúrában pontosan akkor van bármely A és B elemnek kondícionálisa, ha bármely A esetén létezik olyan $\to_{E,A}: E \to E$ monoton függvény, amely jobb oldali adjungáltja a $\wedge_{E,A}$ -nek. Ezeket az ún. kondícionálisokat a $\wedge_{E,A}$ jobb oldali adjungáltjai jelölik ki.

Egy **E** előrendezett struktúrában pontosan akkor van bármely B és A elemnek különbsége, ha bármely A esetén létezik olyan $\backslash_{E,A}: E \to E$ monoton függvény, amely bal oldali adjungáltja a $\vee_{E,A}$-nek. Ezeket a különbségeket a $\vee_{E,A}$ bal oldali adjungáltjai jelölik ki.



3. ábra: *A konnektívek adjungált szituációkkal való jellemzése.*

A „hamis, hogy …" és a „nem igaz, hogy …"

A tagadást nem szükséges már külön definiálnunk, mivel az definiálható az eddigiekből. Erre két meghatározás is adódik:

Egy A elem $\neg A$-val jelölt *komplemensén* olyan elemet értünk, amely a leggyengébb azok közt, amelyek A-val való konjunkciója hamis: minden más olyan C-ből következik $\neg A$, amellyel $A \wedge C$ hamis. A $\neg A$ tehát egy $A \to \downarrow$ elem.

Egy A elem $\sim A$-val jelölt *szupplemensén* olyan elemet értünk, amely a legerősebb azok közt, amelyek A-val való diszjunkciója igaz: minden más olyan C következik $\sim A$-ból, amellyel $A \vee C$ igaz. $A \sim A$ tehát egy $\uparrow \backslash A$ elem.

A két definíció a negáció-val kapcsolatos két klasszikus elvárást foglalja magában:

- $\neg A$ az A-t kizáró állítás, amely A-val együtt hamis kell legyen: $A \wedge \neg A \Leftrightarrow \downarrow$
- $\sim A$ pedig az A-t kiegészítő állítás, amely A-val együtt igaz kell legyen: $A \vee \sim A \Leftrightarrow \uparrow$

A két, negációval kapcsolatos elvárás együtt maga a dilemma, a kétértékűség elve: $\neg A$ az a negáció, amely teljesíti az ellentmondás elvét, $\sim A$ az a negáció, amely teljesíti a kizárt harmadik elvét. A két negációt e szerepeik okán érdemes a bevezetőben is említett módon kiolvasni:

$\neg A$: „hamis, hogy A"

$\sim A$: „nem igaz, hogy A"

A kettő azonosításával definiálható tehát a klasszikus negáció – és ezáltal az eddig logikai konnektívumokkal a klasszikus logika. Olyan koncepciókra is adható azonban példa, amelyekben a két elvárás közül csak az egyiket várják el a tagadástól, a másikat egyenesen elutasítják.

A tudományfilozófiát tekintve egy verifikacionalista tudós, például egy matematikus hozzáállását az jellemzi, hogy az elméletéből levezetésekkel állításokat igazoljon vagy cáfoljon, ilyen igazolt vagy cáfolt állításból pedig minél több legyen. Azt mindenképpen elvárja, hogy egy állítást ne lehessen egyszerre igazolni és cáfolni, de annak lehetőségét fenntartja, hogy egy állítás lehessen egyszerre bizonyíthatatlan és cáfolhatatlan – azaz bizonyíthatóság és cáfolhatóság ne merítse ki a lehetőségek körét. A verifikacionalista hozzáálláshoz tehát a $\neg A$ komplementum tagadásfogalma illik, a szupplementum tagadásfogalma pedig – Gödel nemteljességi tételei óta különösen – nem illik.

Egy falszifikacionalista tudós (például egy fizikus) hozzáállását ugyanakkor az jellemzi, hogy az elméletével kompatibilis, de egymásnak ellentmondó állításpárokat vizsgáljon, és arra törekszik, hogy minél kevesebb ilyen ellentmondó pár maradjon. Azt mindenképpen elvárja, hogy két ilyen állítás kimerítő legyen (például egy kísérlet az ellentmondó hipotézispárból legalább az egyiket alátámassza), azonban természetesnek veszi, hogy előfordul olyan lehetőség, hogy bármelyik állítást is adja hozzá az elméletéhez, az így keletkezett elmélet konzisztens marad. A falszifikacionalista hozzáálláshoz tehát a $\sim A$ szupplementum tagadásfogalma illik, a komplementum tagadásfogalma pedig – Quine aluldeterminációs tézise óta különösen – nem illik.

Az első, verifikacionista koncepció logikája az intuicionista logika, a második, falszifikacionista koncepció az ún. ko-intuicionista logika[10]. Ezek, a klasszikus és a duális intuicionista logika strukturalista meghatározását adjuk a következőkben – először az elemeik, aztán a viszonyaik által.

Intuicionista logika

Elemei által: *Intuicionista logika* az olyan **I** előrendezés, amelyben van hamis és igaz elem, és bármely két elemnek van konjunkciója, diszjunkciója és kondícionálisa.

Előrendezések által: *Intuicionista logika* az olyan **I** előrendezés, amelynek a c_I és Δ_I függvénye balról és jobbról, tetszőleges $\wedge_I$ függvénye pedig jobbról adjungált szituációba állítható.

Ko-intuicionista logika

Elemei által: *Ko-intuicionista logika* az olyan **K** előrendezés, amelyben van hamis és igaz elem, és bármely két elemnek van konjunkciója, diszjunkciója és különbsége.

10 A duális intuicionista logika tudománymetodológiai alkalmazásáról bővebben lásd SHRAMKO 2005.

Előrendezések által: *Ko-intuicionista logika* az olyan **K** előrendezés, amellyel a c_K és Δ_K függvény balról és jobbról, tetszőleges $\vee_K$ függvény pedig balról adjungált szituációba állítható.

Természetesen adódik a kérdés: Igaz-e, hogy azok az előrendezések, amelyek egyszerre intuicionista és ko-intuicionista logikák, olyan logikák-e, amelyeket klasszikus logikaként ismerünk? A válasz nemleges. Ez a vékony határmezsgye a duális intuicionista logika, és a klasszikus logika kapcsán erről csak a következőt állíthatjuk: a klasszikus logikák a duális intuicionista logikák azon osztálya, amelyben a két negációfogalom nem különbözik. Azt az állítást, hogy ez az osztály *valódi része* a duális intuicionista logikák osztályának, egy modell létezése bizonyítja, amelyet a szemantikáról szóló részben adunk meg. Összegezve:

Duális intuicionista logika

Elemei által: *Duális intuicionista logika* az olyan **D** előrendezés, amelyben van hamis és igaz elem, bármely két elemnek van konjunkciója, diszjunkciója, kondícionálisa és különbsége.

Előrendezések által: *Duális intuicionista logika* az olyan **D** előrendezés, amellyel a c_D és Δ_D függvény balról és jobbról, tetszőleges $\vee_D$ függvény balról, tetszőleges $\wedge_D$ függvény pedig jobbról adjungált szituációba állítható.

Klasszikus logika

Elemei által: *Klasszikus logika* az olyan C előrendezés, amelyben van hamis és igaz elem, bármely két elemnek van konjunkciója, diszjunkciója, kondícionálisa és különbsége, az ezekkel definiált negációk pedig ugyanazon elemeket határozzák meg.

Előrendezések által: *Klasszikus logika* az olyan C előrendezés, amellyel a c_C és Δ_C függvény balról és jobbról, tetszőleges $\vee_C$ függvény balról, tetszőleges $\wedge_C$ függvény pedig jobbról adjungált szituációba állítható, a $\rightarrow_C \circ \downarrow_C$ összetett függvények[11] pedig pontosan a $\backslash_C \circ \uparrow_C$ összetett függvények.

Szintaktikai meghatározás: a Lawvere-kalkulus

Az előző szakaszban megmutattuk, hogyan lehet logikát származtatni az adjungált szituációk fogalmából. Az adjungált szituációk által előírható szabályokra azonban gondolhatunk úgy is, mint egy levezetési rendszer levezetési szabályaira, így az előző pontban a duális intuicionista logika fogalmából származtathatunk egy levezetési rendszert is. Ez a Lawvere-féle szekvenskalkulus, amit a 4. ábrán foglaltunk össze.[12]

11 A $\circ$ a függvénykompozíció jele: $f \circ g(x) = f(g(x))$.

12 A „szekvens” előtag arra utal, hogy nem formulákat vezet le a kalkulus, hanem formulák közti következményrelációról szóló állításokat. Ezen „formula-nyíl-formula” jelsorozatokat nevezik szekvenseknek. Az első szekvenskalkulus Gentzen szekvenskalkulusa volt. Ugyanő alkotta meg a később számunkra is fontossá váló természetes levezető kalkulust is. Bővebben: GENTZEN 1935.

Egy másik (nem adjunkciókból származtatott), egyébként általánosabban is értelmezett szekvenskalkulussal való axiómatizálásért lásd URBAS 1996.

$$\Rightarrow \qquad (\Rightarrow_r): \; A \Rightarrow A \qquad\qquad (\Rightarrow_t): \; \begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ B \Rightarrow C \\ \hline A \Rightarrow C \end{array} \qquad \Rightarrow$$

$$\downarrow \qquad (\downarrow_\varepsilon): \; \downarrow \Rightarrow A \qquad\qquad (\uparrow_\eta): \; A \Rightarrow \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\wedge \qquad \begin{array}{ll} (\wedge_\theta): & \begin{array}{c} A \Rightarrow B \quad A \Rightarrow C \\ \hline\hline A \Rightarrow B \wedge C \end{array} \\ (\wedge_\varepsilon): & \begin{array}{c} A \wedge B \Rightarrow A \\ A \wedge B \Rightarrow B \end{array} \\ (\wedge_\eta): & A \Rightarrow A \wedge A \\ (\wedge_F): & \begin{array}{c} A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow D \\ \hline A \wedge B \Rightarrow C \wedge D \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (\vee_\theta): & \begin{array}{c} A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow C \\ \hline\hline A \vee B \Rightarrow C \end{array} \\ (\vee_\eta): & \begin{array}{c} A \Rightarrow A \vee B \\ B \Rightarrow A \vee B \end{array} \\ (\vee_\varepsilon): & A \vee A \Rightarrow A \\ (\vee_F): & \begin{array}{c} A \Rightarrow C \quad B \Rightarrow D \\ \hline A \vee B \Rightarrow C \vee D \end{array} \end{array} \qquad \vee$$

$$\rightarrow \qquad \begin{array}{ll} (\rightarrow_\theta): & \begin{array}{c} A \wedge B \Rightarrow C \\ \hline\hline A \Rightarrow B \rightarrow C \end{array} \\ (\rightarrow_\eta): & B \Rightarrow A \rightarrow (A \wedge B) \\ (\rightarrow_\varepsilon): & A \wedge (A \rightarrow B) \Rightarrow B \\ (\rightarrow_F): & \begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \hline C \rightarrow A \Rightarrow C \rightarrow B \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (\setminus_\theta): & \begin{array}{c} A \setminus B \Rightarrow C \\ \hline\hline A \Rightarrow C \vee B \end{array} \\ (\setminus_\eta): & B \Rightarrow A \vee (B \setminus A) \\ (\setminus_\varepsilon): & (A \vee B) \setminus A \Rightarrow B \\ (\setminus_F): & \begin{array}{c} A \Rightarrow B \\ \hline A \setminus C \Rightarrow B \setminus C \end{array} \end{array} \qquad \setminus$$

$$\neg \qquad \begin{array}{ll} (\neg_\theta): & \begin{array}{c} A \wedge B \Rightarrow \downarrow \\ \hline\hline A \Rightarrow \neg B \end{array} \\ (\neg_\varepsilon): & A \wedge \neg A \Rightarrow \downarrow \\ (\neg_F): & \begin{array}{c} A \Rightarrow \downarrow \\ \hline C \rightarrow A \Rightarrow \neg C \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{ll} (\sim_\theta): & \begin{array}{c} \sim B \Rightarrow C \\ \hline\hline \Rightarrow C \vee B \end{array} \\ (\sim_\eta): & \Rightarrow A \vee \sim A \\ (\sim_F): & \begin{array}{c} \Rightarrow B \\ \hline \sim C \Rightarrow B \setminus C \end{array} \end{array} \qquad \sim$$

4. ábra: *Az adjungált szituációkból származtatott Lawvere-kalkulus*

Két formula közt egy vonal a „Ha … akkor …”, két vonal az „ … akkor és csak akkor, ha …” metanyelvi kifejezésekre utal. A szabályok melletti címkék magyarázata a következő: K_θ jelenti azt, hogy az állítás a K konstansra vonatkozó adjungált szituáció fogalmából adódik. K_η és K_ε utal arra, hogy a K konstansra vonatkozó adjungált szituáció ekvivalens meghatározásából adódnak. A K_F arra utal, hogy a szabály az adott logikai konstansért felelős adjungált függvény monotonitásából adódik.

Az $\Rightarrow_r$ illetve $\Rightarrow_t$ jelölések arra utalnak, hogy a szabályok a következményreláció reflexív és tranzitív voltából adódnak.

Intuicionista logika

Először is belátjuk, hogy a Lawvere kalkulus tartalmazza az intuicionista logika tételeit. Ezt úgy látjuk be, hogy bemutatjuk az intucionista logika egy szokásos axiómarendszerének, az ún. természetes levezetésnek a szekvensekre átírt változatát, majd a Lawvere kalkulusban bebizonyítjuk az így nyert természetes levezetésbeli axiómákat – így egy csapásra a magunkénak tudhatjuk az összes intuicionista logikai tételt.

A természetes levezetés szekvensekkel való felírása az 5. ábrán található. A szabályok mellett szereplő rövidítések azt jelölik, hogy az adott szabály melyik Lawvere-kalkulusbeli szabályból következik. Ezek legnagyobbrészt lényegében egyetlen szabályból, és abból is triviálisan következnek.

	Az összetettből következtetés:	Az összetettre következtetés:
$\wedge$	$\dfrac{G \Rightarrow A \wedge B}{G \Rightarrow A}(\wedge_\theta)$ $\dfrac{G \Rightarrow A \wedge B}{G \Rightarrow B}(\wedge_\theta)$	$\dfrac{G \Rightarrow A \quad G \Rightarrow B}{G \Rightarrow A \wedge B}(\wedge_\theta)$
$\vee$	$\dfrac{G \wedge A \Rightarrow C \quad G \wedge B \Rightarrow C \quad G \Rightarrow A \vee B}{G \Rightarrow C}$	$\dfrac{G \Rightarrow A}{G \Rightarrow A \vee B}(\vee_\eta)$ $\dfrac{G \Rightarrow B}{G \Rightarrow A \vee B}(\vee_\eta)$
$\rightarrow$	$\dfrac{G \Rightarrow A \quad G \Rightarrow A \rightarrow B}{G \Rightarrow B}(\rightarrow_\epsilon)$	$\dfrac{G \wedge A \Rightarrow B}{G \Rightarrow A \rightarrow B}(\rightarrow_\theta)$
$\neg$	$\dfrac{G \Rightarrow A \quad G \Rightarrow \neg A}{G \Rightarrow \downarrow}(\rightarrow_\epsilon)$	$\dfrac{G \wedge A \Rightarrow \downarrow}{G \Rightarrow \neg A}(\rightarrow_\theta)$
$\downarrow$	$\dfrac{G \Rightarrow \downarrow}{G \Rightarrow A}(\downarrow_\eta)$	$\left(G \Rightarrow A \vee \sim A\,(\backslash_\eta)\right)$

5. ábra: *A természetes levezetőkalkulus mint szekvenskalkulus*

Egyetlen szabály érdemel csak kifejtést, ez pedig a $\vee$ konstansból következtető szabály. Ehhez egy disztributivitásról szóló lemmára is szükség van, ez és a $\vee$ jel kivezetési szabályának bizonyítása szerepel a 6. ábrán. A lemma bizonyításában lépten nyomon kihasználtuk a $\vee$ és $\wedge$ konnektívek kommutativitását – ezek azonnal adódnak az $\wedge_\theta$ és $\vee_\theta$ összefüggésekből.[13]

$\vee$ kivezetése	
$G \wedge A \Rightarrow C$	(feltevés)
$G \wedge B \Rightarrow C$	(feltevés)
$(G \wedge A) \vee (G \wedge B) \Rightarrow C$	$(\vee_\theta)$
$G \wedge (A \vee B) \Rightarrow (G \wedge A) \vee (G \wedge B)$	(lemma)
$G \wedge (A \vee B) \Rightarrow C$	($\Rightarrow$ tranzitív)
$G \Rightarrow (A \vee B) \rightarrow C$	$(\rightarrow_\theta)$
$G \Rightarrow A \vee B$	(feltevés)
$G \Rightarrow A \vee B \wedge ((A \vee B) \rightarrow C)$	$(\wedge_\theta)$
$A \vee B \wedge ((A \vee B) \rightarrow C) \Rightarrow C$	$(\rightarrow_\epsilon)$
$G \Rightarrow C$	($\Rightarrow$ tranzitív)

lemma	
$B \wedge G \Rightarrow (G \wedge A) \vee (G \wedge B)$	$(\wedge_\epsilon)$
$A \wedge G \Rightarrow (G \wedge A) \vee (G \wedge B)$	$(\wedge_\epsilon)$
$B \Rightarrow G \rightarrow ((G \wedge A) \vee (G \wedge B))$	$(\rightarrow_\theta)$
$A \Rightarrow G \rightarrow ((G \wedge A) \vee (G \wedge B))$	$(\rightarrow_\theta)$
$A \vee B \Rightarrow G \rightarrow ((G \wedge A) \vee (G \wedge B))$	$(\vee_\theta)$
$G \wedge (A \vee B) \Rightarrow (G \wedge A) \vee (G \wedge B)$	$(\rightarrow_\theta)$

6. ábra: *A természetes levezetőkalkulus egyetlen nem triviális szabályának levezetése a Lawvere kalkulusból*

13 Figyelemre méltó, hogy az iménti bizonyításban $\vee$ valójában úgy lett kivezetve, hogy egy modus ponensszel, egy $\Rightarrow_\epsilon$ szabállyal vezettük ki. Ez máshogy sajnos nem is lehetséges: $\vee$-t ugyanis a saját szabályai alapján nemtriviális módon csak a bal oldalról lehet kivezetni. Ha tehát pl. mint most is, a jobb oldalon bukkan fel a $\vee$, akkor gyakorlatilag eszköz nélkül maradunk. Ennek az a tanulsága, hogy a logikai konstansok, de különösen $\vee$ és $\wedge$ konstansok adjunkciókkal való tárgyalására nem szabad úgy gondolni, hogy az ott leírt, adjunkciókból származtatott tulajdonságok *maradéktalanul* ki is elégítik mindazon várakozásainkat, amelyeket szokásosan támasztani szoktunk ezen logikai konstansokkal szemben. Jelen esetben: A $\vee$ kivezetési szabálya (ami igen alapvető elvárás a diszjunkcióval szemben) tehát nem megoldható olyan logikákban, amelyekben nincs kondícionális, azaz amelyek esetén az ottani $\wedge_A$ függvényeknek nincsen jobb oldali adjungáltja. A konjunkcióval és diszjunkcióval kapcsolatos szabályok tárgyalása tehát valójában nem fejeződött be a konjunkció és diszjunkcióról szóló szakaszban.

Dualitás

Mielőtt megvizsgálnánk a Lawvere kalkulus nem intuicionista (azaz nem csak a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$, jeleket tartalmazó) tételeit, érdemes szemügyre venni a Lawvere kalkulus szimmetriáját. Ezt formálisan is meg lehet fogalmazni, mégpedig a szimmetriát tetten érő **co** függvény segítségével:

$$\begin{aligned}
\mathbf{co}(p) &= p \\
\mathbf{co}(\uparrow) &= \downarrow \\
\mathbf{co}(\downarrow) &= \uparrow \\
\mathbf{co}(A \wedge B) &= \mathbf{co}(\mathrm{B}) \vee \mathbf{co}(A) \\
\mathbf{co}(A \vee B) &= \mathbf{co}(\mathrm{B}) \wedge \mathbf{co}(A) \\
\mathbf{co}(A \rightarrow B) &= \mathbf{co}(\mathrm{B}) \setminus \mathbf{co}(A) \\
\mathbf{co}(A \setminus B) &= \mathbf{co}(\mathrm{B}) \rightarrow \mathbf{co}(A)
\end{aligned}$$

ahol p atomi formulákat jelöl.

Mivel a negációk definiált konstansok, ebből a definícióból már adódik a fordításuk:

$$\begin{aligned}
\mathbf{co}({\sim}A) &= \neg\mathbf{co}(A) \\
\mathbf{co}(\neg A) &= {\sim}\mathbf{co}(A)
\end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy ez a függvény idempotens, azaz $\mathbf{co}(\mathbf{co}(A)) = A$ tetszőleges A formula esetén fennáll. A továbbiakban egy $A \Rightarrow B$ szekvens duális szekvensének a $\mathbf{co}(B) \Rightarrow \mathbf{co}(A)$ szekvenst fogom nevezni. A levezetési szabályokra is kiterjeszthető a dualitás fogalma, a „Ha $A \Rightarrow B$, akkor $C \Rightarrow D$" levezetési szabály duálisa a „Ha $\mathbf{co}(B) \Rightarrow \mathbf{co}(A)$, akkor $\mathbf{co}(D) \Rightarrow \mathbf{co}(C)$" szabály.

A Lawvere-kalkulust újra szemügyre véve látható, hogy az egymás mellett szereplő szekvensek egymás duálisai (az első sor elemei pedig saját maguk duálisai), azaz a kalkulus egésze ebben az értelemben önduális. Ez az oka a következő dualitási tételnek:

A Lawvere-kalkulus dualitási tétele: *A Lawvere-kalkulusban pontosan akkor vezethető le egy szekvens, ha a duálisa levezethető, és egy következtetési szabály pontosan akkor érvényes, ha a duálisa érvényes.*

A bizonyítás vázlata: A bizonyítás szekvensekre illetve szabályok alkalmazására vonatkozó indukcióval történik. Az $\Rightarrow_r$ és $\Rightarrow_l$ szabály önduális, a további axiómák és szabályok esetében pedig könnyen ellenőrizhető, hogy a mellette lévő formula a duális párjuk – a **co** függvény tehát a Lawvere-kalkulust önmagába fordítja.

Mivel egy levezetés minden lépésében a fenti szabályok valamelyikét kellett használnunk, a levezetés minden szekvensének duálisa által alkotott bizonyítás is jó kell legyen; ezeket ugyanis a duális következtetési szabályok kapcsolják össze, amelyek mint láttuk, ugyanúgy érvényesek.

Ezzel a tétellel igen sok formula bizonyítását nyerhetjük: Innentől kezdve az intuicionista logika minden tételének duális párja is tétel, tehát rendelkezünk a ko-intuicionista logika összes tételével is. Ilyen intuicionista és kointucionista szekvenseket foglaltunk össze a 7. ábrán.

$(IC1)$	$A \wedge \neg A$	$\Rightarrow$	$\downarrow$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$\uparrow$	$\Rightarrow$	$\sim C \vee C$	$\text{co}(IC1)$
$(IC2)$	A	$\Rightarrow$	$\neg\neg A$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$\sim\sim C$	$\Rightarrow$	C	$\text{co}(IC2)$
$(IC3)$	$\neg A \vee \neg B$	$\Rightarrow$	$\neg(A \wedge B)$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$\sim(D \vee C)$	$\Rightarrow$	$\sim D \wedge \sim C$	$\text{co}(IC3)$
$(IC4)$	$\neg A \wedge \neg B$	$\Rightarrow$	$\neg(A \vee B)$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$\sim(D \wedge C)$	$\Rightarrow$	$\sim D \vee \sim C$	$\text{co}(IC4)$
$(IC5)$	$\neg(A \vee B)$	$\Rightarrow$	$\neg A \wedge \neg B$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$\sim D \vee \sim C$	$\Rightarrow$	$\sim(D \wedge C)$	$\text{co}(IC5)$
$(IC6)$	$A \vee B$	$\Rightarrow$	$\neg A \rightarrow B$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$D \setminus \sim C$	$\Rightarrow$	$D \wedge C$	$\text{co}(IC6)$
$(IC7)$	$\neg A \vee B$	$\Rightarrow$	$A \rightarrow B$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$D \setminus C$	$\Rightarrow$	$D \wedge \sim C$	$\text{co}(IC7)$

7. ábra: *A dualitási tétel alkalmazása*

Ezzel azonban nem merítettük ki az összes tételeink körét. Az így megkapható tételek olyan szekvensek, amelyek vagy tisztán intuicionisták, vagy tisztán ko-intuicionisták, azaz egyikben sem szerepel egyszerre → és \. Ilyen tételekre lenne pedig szükség ahhoz, hogy összehasonlíthassuk a negációkat.

A duális intuicionista logika két tiszta fele közti kapcsolatot egy lemmával, pontosabban egy duális lemmapárral fogjuk megteremteni. Ezek levezetését adtuk meg a 8. ábrán.

$$(\setminus \wedge \neg)\ \frac{A \setminus B \Rightarrow C}{A \wedge \neg B \Rightarrow C} \qquad \frac{Z \Rightarrow Y \rightarrow X}{Z \Rightarrow \sim Y \vee X}\ (\rightarrow / \sim \vee)$$

LEVEZETÉS:

(feltevés)	$A \setminus B$	$\Rightarrow$	C	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	Z	$\Rightarrow$	$Y \rightarrow X$	(feltevés)
$(\setminus_e)$	A	$\Rightarrow$	$C \vee B$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$Y \wedge Z$	$\Rightarrow$	X	$(\rightarrow_e)$
(kommutatív)	$C \vee B$	$\Rightarrow$	$B \vee C$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$Z \wedge Y$	$\Rightarrow$	$Y \wedge Z$	(kommutatív)
$(IC6)$	$B \vee C$	$\Rightarrow$	$\neg B \rightarrow C$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$Z \setminus \sim Y$	$\Rightarrow$	$Z \wedge Y$	$(\text{co}(IC6))$
$(\Rightarrow_t)$	A	$\Rightarrow$	$\neg B \rightarrow C$	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	$Z \setminus \sim Y$	$\Rightarrow$	X	$(\Rightarrow_t)$
$(\rightarrow_e)$	$A \wedge \neg B$	$\Rightarrow$	C	$\overset{\text{co}}{\leftrightsquigarrow}$	Z	$\Rightarrow$	$\sim Y \vee X$	$(\setminus_e)$

8. ábra: *Két fontos „vegyes" levezetési szabály*

A levezetésben megadtuk mindkét lemma levezetését, ezt azonban pont a dualitási tétel értelmében mellőzhettük is volna – a továbbiakban ezt mellőzni is fogjuk.

Vegyük észre, hogy az első lemmában ha elvégezzük az $A := \uparrow$, $B := A$, $C := \sim A$ helyettesítést, továbbá pár triviális lépést, akkor a következő „szabályt" kapjuk:

Ha $\sim A \Rightarrow \sim A$, akkor $\neg A \Rightarrow \sim A$.

Ez $\Rightarrow_r$ miatt a $\neg A \Rightarrow \sim A$ szekvens levezetését adja. Tehát a kalkulusunk szerint ami *hamis* (ekvivalens a $\downarrow$ elemmel), az nem igaz (tehát az igazságon kívüli tartományhoz tartozik, tehát az állítással együtt a kettő kiadja az $\uparrow$ elemet). A következményreláció fordítva nem áll fenn, ezt a szemantikáról szóló szakaszban be is bizonyítjuk.

Bár a két negáció fogalmának nem sok köze van Westerhoff *de re* és *de dicto* módon való tagadásához, az mégis közös bennük, hogy ahogyan nála a *de re* tagadásból következett a *de dicto*, úgy itt is a „hamis"-ból következik a „nem igaz".

A következőkben rátérünk a megerősítő kijelentésekre: a kétszeres negációkra.

Negáció mint modalitás

A kétszer tagadott állítás egy pozitív állítás, és a klasszikus logikában ugyanaz is. Nem klasszikus logikában viszont nem. Az intuicionista logikában egy A állításból lehet $\neg\neg A$-ra következtetni, az $\neg\neg A$ állításból azonban nem lehet A-ra következtetni. Ebből következik, hogy a ko-intuicionista logikában viszont lehet $\sim\sim A$-ból A-ra következtetni, fordítva viszont nem. Ezen állításunkat egy cáfoló modell bemutatásával is alátámasztjuk a szemantikáról szóló fejezetben.

A pozitív állítások körében tehát a következő hierarchia áll rendelkezésünkre:

$$\sim\sim A \Rightarrow \mathrm{A} \Rightarrow \neg\neg A$$

Mivel azonban a negációkat keverni is lehet, ezt a két negáció közt fennálló következményviszony értelmében tovább finomíthatjuk az összes lehetséges kettős tagadás hierarciájára:

$$\neg\sim A \Rightarrow \sim\sim A \Rightarrow A \Rightarrow \neg\neg A \Rightarrow \sim\neg A$$

Azt láthatjuk tehát, hogy a kettős tagadások egyike sem ekvivalens általában a tagadatlan mondatokkal. Ezek az állítások olyan módon állítják az A állítást, hogy kétszer tagadják. A logikának az az ága pedig, amely olyan állításokkal foglalkozik, amelyek valamilyen módon igazak, a modális logika. Kézenfekvő tehát ezen összetett konnektívek modális operátorként való vizsgálata. Mi most kiválasztjuk a lista legerősebb és leggyengébb elemét[14]:

$$\Box A \Leftrightarrow \neg\sim A \qquad\qquad \Diamond A \Leftrightarrow \sim\neg A$$

A továbbiakban bebizonyítjuk a modális logikában alapvető formulákat. Mivel a negációk a kivonás és a kondicionális speciális esetei, az ezzel kapcsolatos állításokhoz szükségünk lesz egy lemmapárra, ami nagyon emlékeztet a $\rightarrow_F$ és $\setminus_F$ szabályokra. Ezek levezetését adtuk meg a 9. ábrán.

$$\frac{A \Rightarrow B}{B \to C \Rightarrow A \to C} \qquad\qquad \frac{A \Rightarrow B}{C \setminus B \Rightarrow C \setminus A}$$

Levezetés:

$$\begin{array}{rcll}
A & \Rightarrow & B & (\texttt{feltevés}) \\
(B \to C) \wedge A & \Rightarrow & A & (\wedge_\varepsilon) \\
(B \to C) \wedge A & \Rightarrow & B & (\Rightarrow_t) \\
(B \to C) \wedge A & \Rightarrow & B \to C & (\wedge_\varepsilon) \\
(B \to C) \wedge A & \Rightarrow & B \wedge (B \to C) & (\wedge_\theta) \\
B \wedge (B \to C) & \Rightarrow & C & (\to_\varepsilon) \\
(B \to C) \wedge A & \Rightarrow & C & (\Rightarrow_t) \\
B \to C & \Rightarrow & A \to C & (\to_\theta)
\end{array}$$

A másik pedig ennek duálisa.

9. ábra: *Két anti-monotonitást kifejező lemma*

Innen (ha C helyére $\downarrow$-ot és $\uparrow$-ot helyettesítünk) adódnak a $\Rightarrow$ -re vonatkozó, 10. ábrán összefoglalt kontrapozíciós szabályok, ezek kétszeres alkalmazásaként adódnak a modális

14 Lehetséges máshogyan is választani, sőt: az ún. *De Morgan* intuicionista logikákban kifejezetten az 1-4 illetve 2-5 elemek választása a kedvező. Erről bővebben lásd: REYES-ZOLFAGHARI 1996. De van, aki a tisztán intuicionista kettőstagadás erős operátornak való választásával törődik, például DOŠEN 1984. Mi elsősorban azért tettünk így, mert a $\sim\sim$ esetében elég reménytelennek látszik a **K**-sémája (ez a modus ponensre hasonlító formula a modális logikáról szóló szakaszból), a $\neg\neg$ esetében viszont pont ellenkező a helyzet: túl gördülékenyen halad minden, és modális logikai szempontból nézve a modalitás trivializálódik (ami egy igazságpredikátum jellegű modalitástól még nem lenne meglepő, de úgy, hogy emellett nem tudja a **T** sémát, az).

logikában alapvető Lemmon-szabályok, amelyek a kettős negációk *monoton* voltát fejezik ki. A Lemmon-szabály egy speciális esete a modális generalizáció szabálya, amely a modális logikáról szóló fejezetben már szerepelt, mint a normális modális operátor egy szükséges tulajdonsága.

$$\frac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \neg A} \qquad \frac{A \Rightarrow B}{\sim B \Rightarrow \sim A} \qquad \frac{A \Rightarrow B}{\neg B \Rightarrow \sim A}$$

$$\frac{A \Rightarrow B}{\Box A \Rightarrow \Box B} \qquad \frac{A \Rightarrow B}{\Diamond A \Rightarrow \Diamond B}$$

$$\frac{\top \Rightarrow A}{\top \Rightarrow \Box A} \qquad \frac{\top \Rightarrow A}{\top \Rightarrow \neg\sim A}$$

10. ábra: *Tagadásokkal és kettős tagadásokkal kapcsolatos levezetési szabályok*

A másik fontos kritérium, az ún. **K**-séma is levezethető, ehhez azonban még szükség van az $\Box$ operátor $\Box A \wedge \Box B$ alakú mondatokból való kiemelhetőségére is. Ez a kettő levezetés, és a szükségszerűségről szóló modális logikák egy erős, **B**-nek nevezett tulajdonságának levezetése szerepel a 11. ábrán. Végül megjegyezzük, hogy a modális logikai **T**-séma, azaz $\Box A \rightarrow A$ vagy $\Box A \Rightarrow A$ teljesül a kettőstagadások hierarchiájából adódóan: A kettős tagadás tehát modális szempontból egy komoly erővel bíró operátor.

$$\wedge\Box \Rightarrow \Box\wedge : \quad \begin{array}{rcll} \Box A \wedge \Box B & \Rightarrow & \neg\sim A \wedge \neg\sim B & (\texttt{per def}) \\ \neg\sim A \wedge \neg\sim B & \Rightarrow & \neg(\sim A \vee \sim B) & (IC4) \\ \sim(A \wedge B) & \Rightarrow & \sim A \vee \sim B & (\mathrm{co}(IC4)) \\ \neg(\sim A \vee \sim B) & \Rightarrow & \neg\sim(A \wedge B) & (\neg\texttt{-kontrapozíció}) \\ \Box A \wedge \Box B & \Rightarrow & \Box(A \wedge B) & (\Rightarrow_t) \end{array}$$

$$\mathbf{K} : \quad \begin{array}{rcll} (A \rightarrow B) \wedge A & \Rightarrow & B & (\rightarrow_t) \\ \Box((A \rightarrow B) \wedge A) & \Rightarrow & \Box B & (\texttt{Lemmon}) \\ \Box(A \rightarrow B) \wedge \Box A & \Rightarrow & \Box((A \rightarrow B) \wedge A) & (\Box\ \texttt{kiemelése}) \\ \Box(A \rightarrow B) \wedge \Box A & \Rightarrow & \Box B & (\Rightarrow_t) \\ \Box(A \rightarrow B) & \Rightarrow & \Box A \rightarrow \Box B & (\Rightarrow_t) \end{array}$$

$$\mathbf{B} : \quad \begin{array}{rcll} \sim\sim\neg A & \Rightarrow & \neg A & (\mathrm{co}(IC2)) \\ \neg A & \Rightarrow & \neg\sim\sim\neg A & (\neg\texttt{-kontrapozíció}) \\ A & \Rightarrow & \neg\neg A & (IC2) \\ A & \Rightarrow & \neg\sim\sim\neg A & (\Rightarrow_t) \\ A & \Rightarrow & \Box\Diamond A & (\texttt{per def}) \end{array}$$

11. ábra: *A kettős tagadás modális tulajdonságai*

Van azonban olyan fontos modális tulajdonság is, amelyet már nem képes teljesíteni. Ez a tulajdonság a modális operátorok iterálásáról szóló **4** = $\Box A \Rightarrow \Box\Box A = \Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A$ szekvens. Azt, hogy a **4** szekvens levezethetetlen, már máshogy bizonyítjuk: Egy kalkulushoz adekvát szemantika segítségével.[15]

Szemantikai meghatározás

Duális intuicionista modellnek nevezzük a (W, R, v) rendezett hármast, ahol (W, R) egy olyan modális keretstruktúra, amely *előrendezés* is egyben, v pedig egy olyan függvény, amely minden,

15 A Lawvere-kalkulus ugyanakkor szigorítható úgy, hogy képes legyen a 4 séma levezetésére, erről még a szemantikáról szóló fejezet végén szólunk. A Lawvere-kalkulus(sal ekvivalensnek tekinthető bi-Heyting algebrák) további lehetséges szigorításairól bővebben lásd REYES-ZOLFAGHARI 1996.

konnektíveket és operátort nem tartalmazó kijelentéshez hozzárendeli W-beli világok egy *felszálló* halmazát, azaz lehetséges világok egy olyan halmazát, amelyből az R reláción „előre haladva nem lehet kilépni”:

$$\text{Ha } w \in v(p) \text{ és } wRw', \text{ akkor } w' \in v(p).$$

A $w \in v(p)$ fennállását továbbra is a $w \Vdash p$ kifejezéssel rövidítjük, ezt pedig tetszőleges, tehát konnektíveket is tartalmazó mondatokra a következőképpen terjesztjük ki:

nem igaz, hogy $w \Vdash \downarrow$

$w \Vdash \uparrow$

$w \Vdash A \wedge B \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash A$ és $w \Vdash B$

$w \Vdash A \vee B \quad \Leftrightarrow \quad w \Vdash A$ vagy $w \Vdash B$

$w \Vdash A \to B \quad \Leftrightarrow$ minden w' -re igaz, hogy ha wRw' és $w' \Vdash A$, akkor $w' \Vdash B$.

$w \Vdash A \setminus B \quad \Leftrightarrow$ van olyan w', hogy $w'Rw$, $w' \Vdash A$, de nem igaz, hogy $w' \Vdash B$.

(Itt is, mint az általános modális szemantika esetében a „$w \Vdash A$” jelölésnek bár csak rögzített modellben van értelme, ennek jelölését azonban, amíg félreértéshez nem vezet, elhagyjuk.)

Felhívjuk a figyelmet, hogy $A \to B$ jelentése esetében a w-t R szerint követő w' világokról van szó[16], míg az $A \setminus B$ esetében a w-t *megelőző* világokról van szó.[17]

Az $A \Rightarrow B$ szekvenst egy modellben igaznak mondjuk és ezt $\Vdash A \Rightarrow B$ -vel jelöljük, ha tetszőleges w esetén fennáll, hogy ha $w \Vdash A$, akkor $w \Vdash B$. Egy szekvenst akkor mondunk érvényesnek, ha minden modellben igaz.

Megjegyezzük, hogy nemcsak az atomi kijelentések, de az összetett kijelentések is *felszálló* halmazokban igazak: Az üreshalmaz és W ugyanis felszálló, felszálló halmazok metszete és uniója felszálló. Továbbá, ha egy w világban igaz $A \to B$, akkor az ebből elérhető w' világok mindegyikében is igaz kell ez legyen, hiszen $w' \Vdash A \to B$ igazságához olyan világokat kell csak megvizsgálni, amelyek $w \Vdash A \to B$ igazságához is szükségesek. Hasonlóképpen, ha $A \setminus B$ igaz egy w világban, mert egy megelőző w'-ban $w' \Vdash A$, de nem $w' \Vdash B$, akkor ez a w' világ w minden rákövetkezőjének is megelőző világa lesz, és így azokban $A \setminus B$ is igaz kell legyen.

Ez a szemantika *helyes* a Lawvere-kalkulushoz, azaz a kalkulus minden törvénye és szabálya, így minden általa levezetett szekvens is érvényes eszerint a szemantika szerint. Vagy fordítva: Ha valamely szabály vagy szekvens nem igaz egy modellen, akkor a Lawvere-kalkulus sem vezeti azt le. Ennek a belátása semmi mást nem igényel, mint hogy minden szabály érvényességét igazolni kell. Mi most csak a $(\to_\theta)$ szabály érvényességének bizonyításával illusztráljuk a helyességi tétel bizonyítását.

16 Így ez nem is különbözik a klasszikus modális logikai $\Box(A \to B)$ jelentésétől.

17 Eszerint ez a logikai szemantika nem egy szokásos modális logikai szemantika, hiszen az egyik operátor előre, a másik hátra halad az R mentén. Az ilyen, két konverz modális operátoros logikák szemantikájával az ún. temporális logika foglalkozik.

Ha $A \wedge B \Rightarrow C$ igaz, akkor $A \Rightarrow B \rightarrow C$ is igaz: Ehhez azt kell belássuk, hogy egy tetszőleges világban ha igaz A, akkor $B \rightarrow C$ is igaz kell legyen. Legyen w egy ilyen világ, amelyben igaz A. Ekkor, mivel azon világok halmaza, amelyben A igaz, felszálló halmaz, bármely w' rákövetkezőjében is igaz az A. Az $A \wedge B \Rightarrow C$ szekvens igazsága miatt ekkor minden rákövetkezője olyan, hogy ha ott B igaz, akkor C is az. Tehát w'-ben igaz $B \rightarrow C$. Ezt kellett belátnunk.

Ha $A \Rightarrow B \rightarrow C$ igaz, akkor $A \wedge B \Rightarrow C$ is igaz: Ehhez azt kell belássuk, hogy egy tetszőleges világban ha igaz $A \wedge B$, akkor C is igaz kell legyen. Legyen w egy ilyen világ, amelyben igaz $A \wedge B$. Ekkor itt A is igaz kell, hogy legyen. Az $A \Rightarrow B \rightarrow C$ szekvens igazsága miatt ekkor itt $B \rightarrow C$ is igaz. Az $A \wedge B$-ből pedig B igazsága is következik w-ben, így ott végül $B \rightarrow C$ miatt C is igaz kell, hogy legyen. Ezt kellett belátnunk.

Ez szemantika *adekvát* is a Lawvere-kalkulushoz, azaz eszerint a szemantika szerint *pontosan* azon szekvensek érvényesek, amelyek levezethetőek a Lawvere-kalkulusból.[18]

A konnektívek jelentéséből adódnak a negációk és kettős tagadások jelentései is:

$w \Vdash \neg A \iff$ minden w' -re igaz, hogy ha wRw', akkor ott nem $w' \Vdash A$.

$w \Vdash {\sim} A \iff$ van olyan w', hogy $w'Rw$, de ott nem $w' \Vdash A$.

$w \Vdash \neg{\sim} A \iff$ minden w', w'' -re igaz, hogy ha wRw' és $w''Rw'$, akkor $w'' \Vdash A$.

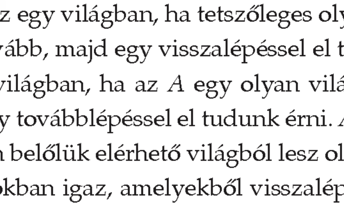
$w \Vdash {\sim}{\sim} A \iff$ van olyan w', hogy minden w''-re igaz, hogy ha $w''Rw'Rw$, akkor $w'' \Vdash A$.

$w \Vdash \neg\neg A \iff$ minden w'-re van olyan w'', hogy $wRw'Rw''$ és $w'' \Vdash A$.

$w \Vdash {\sim}\neg A \iff$ van olyan w',w'', hogy $w'Rw$, $w'Rw''$, és $w'' \Vdash A$.

A $\neg{\sim} A$ tehát pontosan akkor igaz egy világban, ha tetszőleges olyan világban igaz az A, amelyet az R-en való először egy tovább, majd egy visszalépéssel el tudunk érni. Hasonlóképpen ${\sim}\neg A$ pontosan akkor igaz egy világban, ha az A egy olyan világban igaz, amelyet az R-en való először egy vissza, majd egy továbblépéssel el tudunk érni. A $\neg\neg A$ azon világokban igaz, amelyekre fennáll, hogy minden belőlük elérhető világból lesz olyan elérhető világ, ahol az A igaz. Az ${\sim}{\sim} A$ pedig azon világokban igaz, amelyekből visszalépve elérhető egy olyan világ, ahonnan kezdve lefele végig igaz az A.

Az adekvátsági tételnek köszönhetően már képesek vagyunk belátni, hogy a Lawvere kalkulus nem vezet le bizonyos szekvenseket. Vegyük például a 12. ábrán látható modellt.



12. ábra: *Egy duális intuicionista modell,*
amely a legtöbb olyan, eddig nem bizonyított szekvens érvényességét megcáfolja,
amelyek érvényessége komoly problémát okozna a catuşkoţi formalizálásában.

18 Ennek bizonyítása azonban már komolyabb (de sztenderdnek mondható) eszközöket igényel. Részletekért lásd RAUSZER 1980. Ennek egy jó összefoglalóját is nyújtja GORÉ 2000.

Ebben a modellben

- nem igaz a $A \wedge{\sim}A \Rightarrow \downarrow$ szekvens, mivel a w_4 világban igaz $p \wedge{\sim}p$, de $\downarrow$ nem. Ebből következik, hogy az ennél általánosabb $A \wedge{\sim}B \Rightarrow A \setminus B$ szekvens sem érvényes ($B \setminus B \Rightarrow \downarrow$ az ($\setminus_\varepsilon$) szabály miatt, de ebben a modellben is cáfolja w_5)

- nem igaz a $\uparrow \Rightarrow A \vee \neg A$ szekvens, mivel w_5 világ cáfolja. Ebből ($\setminus_\theta$) miatt következik, hogy ${\sim}A \Rightarrow \neg A$ sem lehet igaz (de ezt cáfolja a w_4 is). Ebből az is következik, hogy az ennél általánosabb ($A = \uparrow$) $A \setminus B \Rightarrow A \wedge\neg B$ szekvens sem érvényes.

- nem igaz a ${\sim}{\sim}A \Rightarrow \neg{\sim}A$, szekvens sem, ezt a w_3 világ cáfolja. A dualitási tétel értelmében ez a $\neg\neg A \Rightarrow {\sim}\neg A$ szekvens érvénytelenségét is jelenti.

- nem igaz a $A \Rightarrow {\sim}{\sim}A$, szekvens sem, ezt a w_4 világ cáfolja. A dualitás miatt ekkor a $\neg\neg A \Rightarrow A$ sem lehet érvényes.

- nem igaz a $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$, szekvens, mivel a w_1 világban igaz $\Box p$, de $\Box\Box p$ nem, mivel w_5 nem $v(p)$-beli. A dualitás miatt így a $\Diamond\Diamond A \Rightarrow \Diamond A$ szekvens sem érvényes.

Az adekvátság miatt ugyanakkor azt is képesek vagyunk belátni, hogy a $A \wedge\neg B \Rightarrow A \setminus B$ szekvenst viszont levezeti a kalkulus: Ez ugyanis minden modellben igaz, hiszen ha egy világban igaz A és benne (is) hamis B, akkor van olyan megelőző világ is, amelyben A igaz de B hamis, mégpedig saját maga.

Érvényes, és így levezethető kell legyen a $A\wedge{\sim}A \Rightarrow {\sim}(A\wedge\neg A)$ szekvens is: Legyen ugyanis w egy olyan világ, amelyben igaz $A\wedge{\sim}A$. Ez azt jelenti, hogy w jövőjében igaz az A, de van a múltjában egy w' világ, ahol nem igaz az A. Mármost w'-ben nem igaz az $A\vee\neg A$ sem, hiszen w'-ben nem igaz az A, w-ben pedig igaz az A, így w'-ben $\neg A$ sem lehet igaz. Van tehát egy olyan világ w múltjában, amelyben $A\vee\neg A$ nem igaz, tehát w-ben igaz a ${\sim}(A\vee\neg A)$. Ezt kellett belátnunk.

Az alethikus 4 séma érvényességi köre

A szemantikai megjegyzések lezárásaként pedig bemutatjuk, hogy a $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ szekvens, a továbbiakban 4-nek nevezett szekvens érvénytelensége nem jelenti azt, hogy ennek (vagy a duálisának) axiómaként való elfogadása klasszikus kalkulussá tenné a Lawvere-kalkulust.

Kezdjük két jelölés bevezetésével:

wNw'	$\Leftrightarrow$	léteznek olyan x és y világok, hogy wRx és yRx és yRw'.
$wN^{-1}w'$	$\Leftrightarrow$	léteznek olyan x és y világok, hogy $wR^{-1}x$ és $yR^{-1}x$ és $yR^{-1}w'$, ahol $aR^{-1}b$ definíció szerint bRa.

Ezzel már a modális logikában megszokott módon adhatunk jelentést a két kettős tagadásunknak:

$w \Vdash \Box A \quad \Leftrightarrow \quad$ minden w'-re igaz, hogy ha wNw', akkor $w' \Vdash A$.

$w \Vdash \Diamond A \quad \Leftrightarrow \quad$ van olyan w', amelyre igaz, hogy $wN^{-1}w'$, és $w' \Vdash A$.

A 11. ábrán szereplő model tanulsága nem csak az, hogy a $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$ szekvens megcáfolásához ilyen „valódi” M-alakzatra van szükség, hanem hogy az N reláció e modellen nem szimmetrikus: bár w_1Nw_4, de nem w_4Nw_1. Tegyük fel, hogy w_4Nw, például w_2 és w_4 lásson egy közös világot (itt p a felszállási kikötés folytán igaz lenne). Ekkor azonban $\Box A$ már nem lenne igaz w_1-ben sem, mivel a w_2 és w_4 által közösen látott világon keresztül w_1Nw_5, és így $w_5 \Vdash A$.

Könnyen belátható az is, hogy az N reláció pontosan akkor szimmetrikus, ha tranzitív. Ez arról árulkodik, hogy ennek a formulának a standard normális modális logikai vonzata továbbra is igaz: ez a formula pontosan akkor lesz igaz, ha az általa meghatározott N reláció tranzitív.

A **4** szekvens-sémával (és/vagy duálisával) történő bővítés tehát bár szűkíti a modellek osztályát, még mindig elég sok modellel rendelkezik, hogy ezek számos modelljén a duális intuicionista modellek lényegét adó két tagadásfogalom továbbra se essen egybe. Tehát az alethikus modális logika fő formulasémái, **T**, **B** és **4**, illetve ezek duálisainak együttes elfogadása sem jár azzal, hogy egyetlen klasszikus logikai tagadásfogalom mellett köteleznénk el magunkat. A **4** érvényességi körének precíz meghatározását (és bizonyítását, valamint a duális intuicionista és klasszikus logika közötti kapcsolatok bővebb jellemzését) illetően lásd MOLNÁR 2013.

III. A KOṬIK FORMALIZÁLÁSA

Kiinduló trilemma

Priest formalizálásának modális változatakor a következő *catuṣkoṭi*t tárgyaltuk:

1. (T) $\Box A \wedge \Diamond A$
2. (F) $\Box\neg A \wedge \Diamond\neg A$
3. (B) $\Box A \wedge \Box\neg A$
4. (N) $\Diamond\neg A \wedge \Diamond A$

Használjuk most ki, hogy a duális intuicionista logika és a modális logika hasonló szemantikával bír. Tekintsük ezen formulák jelentéseit az előrendezett modális keretstruktúrákon. Ilyen modellekben a $\Box A$ formulából mindig következik A is, ezért (B) lehetetlenné válik, valamint (T) és (F) is leegyszerűsödik:

1. (T) $\Box A$
2. (F) $\Box\neg A$
3. (B) $\downarrow$
4. (N) $\Diamond\neg A \wedge \Diamond A$

Itt már láthatjuk, hogy (T) és (F) modális szemantikai jelentése nem más, mint a duális intuicionista A és $\neg A$ jelentése. Azon előrendezések pedig, amelyek (N)-et elégítik ki, pontosan azok a modellek, amelyek a Lawvere-kalkulusbeli $A \vee \neg A$-t cáfolják. Az (N)-ek azonban nincs megfelelő duális intuicionista párja, az egyik tagadás ugyanis túl erős, a másik túl gyenge.

Az (N) eset $\neg(A \vee \neg A)$ formulának való választása tökéletes ahhoz, hogy a (T), (F) és (N) páronként kizáróak legyenek (bármely kettőből következzen $\downarrow$), azonban $\neg(A \vee \neg A)$ ezt úgy éri el, hogy már maga ekvivalens a $\downarrow$ elemmel.[19] Nagyobb probléma azonban, hogy ez a három formula nem kimerítő: a három diszjunkciója nem adja ki az $\uparrow$ elemet.

Az $\sim(A \vee \neg A)$ formulának ezzel szemben van modellje (így nem ekvivalens $\downarrow$-vel), sőt ha ezt választjuk (N)-nek, akkor a három formula diszjunkciója kiadja az $\uparrow$ elemet: Az $\sim_\varepsilon$ szabály szerint $\sim(A \vee \neg A)$ az a formula, amellyel $A \vee \neg A \vee \sim(A \vee \neg A) \Leftrightarrow \uparrow$. A probléma most azonban az, hogy bár $\neg_\varepsilon$ megoldja, hogy A és $\neg A$ kizárja egymást, mind $A \wedge \sim(A \vee \neg A)$-nak, mind $\neg A \wedge \sim(A \vee \neg A)$-nak van modellje, tehát az így kapott trilemma nem valódi.[20]

Egy *catuṣkoṭi* formalizálásával szembeni elvárások

A továbbiakban, részben ebből a trilemmából kiindulva egy olyan *catuṣkoṭi* felállítására fogunk törekedni, ami jobb Staal és Westerhoff megoldásánál, azaz:

1. Nincs benne olyan elem, amely ekvivalens a $\downarrow$ elemmel,
2. Nincs benne olyan elem sem, amely ekvivalens a $\uparrow$ elemmel,
3. Kölcsönös diszjunkciójuk mégis kiadja az $\uparrow$ elemet,
4. Páronkénti konjunkciójuk minél több esetben adja ki az $\downarrow$ elemet,
5. Ha ez utóbbi mégsem sikerülne, legalább a *catuṣkoṭi* állításai függetlenek legyenek,
6. Olyan állításnégyes legyen, amely minimális mértékben hasonlít egy *catuṣkoṭi*ra,

   azaz legyen benne pontosan

   - egy állító és/vagy nem tagadó lehetőség,
   - egy tagadó és/vagy nem állító lehetőség,
   - egy állító és egy tagadó lehetőség konjunkciója,
   - egy sem állító, sem tagadó lehetőség konjunkciója,

   vagy egy állító és egy tagadó lehetőség diszjunkciójának tagadása.

19 Ez ugyanaz a probléma is egyben, amely Staal megoldásában is jelen volt: bár páronként kizáróak, ebből az elemből következik az összes többi is.

20 Az előbbinek egy modellje a 11. ábrán látható modell is, itt ugyanis a w_5 világban igaz $p \wedge \sim(p \vee \neg p)$. Ugyanez a modell kiegészíthető egy w_6 világgal úgy, hogy ez a világ a w_5 világ olyan másik alternatívája legyen, amely csak magát látja, és amelyben nem igaz az p. Ebben a w_6 világban ekkor igaz lenne a $\neg p \wedge \sim(p \vee \neg p)$.

Egy egyszerű catuṣkoṭi

Érdemes azonban a *catuṣkoṭi* harmadik állításából kiindulni, miszerint egy állítás egyszerre lehet igaz és nem igaz. Mivel a duális intuicionista logikában továbbra is érvényes az, hogy a $\downarrow$ formulából bármelyik formula következik, az 1. pont elkerülése végett érdemes lenne a harmadik pontot úgy formalizálni, hogy a $\downarrow$ ne következzen belőle. Erre van is jó jelölt: $A \wedge{\sim}A$. Az $A\wedge{\sim}A \Rightarrow \downarrow$ szekvensről ugyanis beláttuk, hogy a Lawvere-kalkulus nem vezeti le, a szemantikában ugyanis van modellje. Tehát $A\wedge{\sim}A$ nem feltétlenül hamis, így legyen ez a *catuṣkoṭi* harmadik, mostantól (B)-vel jelölt állítása.

Ez azonban még mindig képes lehet arra, hogy alakjánál ($\wedge$) fogva következzen belőle a *catuṣkoṭi* második állítása, miszerint egy állítás lehet hamis. A második állítás formalizálásához ezért érdemes $\neg A$-t választani, hiszen ahogy azt szemantikai eszközökkel beláttuk, ez nem következik a ${\sim}A$-ból. Mostantól kezdve tehát $\neg A$ lesz a *catuṣkoṭi*nk (F)-el jelölt második állítása.

Ennek alapján a következő *catuṣkoṭi* adja magát:

1. (T) A

2. (F) $\neg A$

3. (B) $A\wedge{\sim}A$

4. (N) ${\sim}(A\wedge\neg A)$

Erre teljesül az 1. követelmény, hiszen mindegyiknek van modellje, ugyanígy teljesül a 2. követelmény is, hiszen van olyan modell is, amely cáfolja őket. A 3. pont is teljesül, ezt a hamis trilemma kapcsán láttuk, végül pedig az 5. pontnak is eleget teszünk: ez a formalizmus valóban emlékeztet a *catuṣkoṭi*ra.

Probléma van azonban a 3-as és 4-es állításokkal. A $\neg_{\varepsilon}$ szabály miatt (T) és (F) illetve (F) és (B) valóban kizáróak, de más állításpárok nem, sőt a (T) és (N) állítás következik is (B)-ből, ahogyan azt a szemantikáról szóló szakasz végén be is bizonyítottuk.

Egy páronként független catuṣkoṭi

Az előző *catuṣkoṭi*t megpróbálhatjuk kijavítani: Ahhoz, hogy elkerüljük azt, hogy a *catuṣkoṭi* harmadik állításából az első is következzen, miszerint egy állítás lehet igaz, érdemes ugyanazt az ötletet alkalmaznunk, amellyel Priest is kivédte ezt a lehetőséget. Vegyük úgy, hogy a *catuṣkoṭi* első állítása nem csak azt állítja, hogy A igaz, hanem azt is, hogy emellett nem hamis.

A duális intuicionista logikából (T) szerepére hat különböző lehetőség közül lehet választani:[21]

$$A\wedge\neg{\sim}A \;\Rightarrow\; A\setminus{\sim}A \;\Rightarrow\; A\wedge{\sim}{\sim}A \;\Rightarrow\; A\wedge\neg\neg A \;\Rightarrow\; A\setminus\neg A \;\Rightarrow\; A\wedge{\sim}\neg A$$

21 Priestnek ezt az ötletét előbb, még (F)-re is alkalmazva ugyanúgy döntöttünk volna: ott az összes $\neg$ -et tartalmazó lehetőség $\neg A$-val ekvivalens.

A (szigorúan értendő) hierarchia az $A \wedge\sim B$, $A \setminus B$, $A \wedge\neg B$ formulák kapcsolatáról szóló szekvensek szemantikai elemzéséből, és a kettős tagadások hierarchiájából adódik. Hogy az 5., logikai függetlenségről szóló követelménynek megfeleljünk, olyat érdemes ezek közül választani, amelyik a (B)-ből nem következik. A negyedik szekvenstől kezdve mindegyik formula következik (B)-ből, hiszen $A\wedge\sim A \Rightarrow A \Rightarrow \neg\neg A$. Ebből, mivel már tanulmányoztuk a $\Box=\neg\sim$ viselkedését, és láttuk, hogy modalitásként (tehát az igazság egy módjaként) milyen szép tulajdonságokkal bír, az elsőt választjuk.[22] A *catuṣkoṭi* első tagja, (T) tehát nem lesz más, mint $\Box A$.

A *catuṣkoṭi* negyedik tagjára van a legtöbb jelölt. Ennek oka részint a többféle tagadásfogalom, részint az, hogy a ~ az $\wedge$-ből nem kiemelhető: A *catuṣkoṭi* negyedik állítása tehát „nem igaz és nem hamis" illetve „nem igaz, hogy igaz vagy hamis" formában is megfogalmazható úgy, hogy a kettő nem feltétlenül ekvivalens. Szerencsére azonban az így születő számos variáció jelentős része ekvivalens a hamissal, így az 1. (és 5.) követelmény miatt a legtöbb jelöltet a következő diagram alapján kizárhatjuk:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \\
\neg(A\vee\sim A) & & & & & & \neg(A\vee\neg A) & & & & \\
\Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & \\
\neg A\wedge\neg\sim A & \Rightarrow & \neg A\setminus\sim A & \Rightarrow & \neg A\wedge\sim\sim A & \Rightarrow & \neg A\wedge\neg\neg A & \Rightarrow & \neg A\setminus\neg A & \Rightarrow & \neg A\wedge\sim\neg A \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\sim A\wedge\neg\sim A & \Rightarrow & \sim A\setminus\sim A & \Rightarrow & \sim A\wedge\sim\sim A & \Rightarrow & \sim A\wedge\neg\neg A & \Rightarrow & \sim A\setminus\neg A & \Rightarrow & \sim A\wedge\sim\neg A \\
 & & \Downarrow\Uparrow & & \Uparrow & & & & & & \Uparrow \\
 & & & & \sim(A\vee\sim A) & & & & & & \sim(A\vee\neg A) \\
 & & \Downarrow\Uparrow & & \Downarrow\Uparrow & & & & & & \\
 & & \downarrow & \Rightarrow & \downarrow & & & & & &
\end{array}
$$

Itt a függőleges nyilakat az $\rightarrow_F$ és $\setminus_F$ szabályok, a $\neg A \Rightarrow \sim A$ szekvens, illetve a „meglévő" De Morgan azonosságok szolgáltatják. Az $A\setminus A \Rightarrow \downarrow$ alakú szekvensek az $(\setminus_\varepsilon)$ szabályból következnek. A vízszintes nyilak a *catuṣkoṭi* első állítása kapcsán tárgyalt hierarchiából adódnak. Az aláhúzott állítások pedig azon jelöltek, amelyekre adható modell a szemantikában, azaz amelyek az 1. elvárásnak megfelelnek.

Itt az 5. elvárás alapján további jelöltek zárhatók ki: Az $\neg A\wedge\sim\neg A$ jelöltből (F), a kettőstagadások hierarchiájából adódóan az $\sim A\wedge\sim\sim A$ jelöltből (B) következik. Az $\sim A\wedge\neg\neg A$ jelölttel, így az $\sim A\setminus \neg A$ és $\sim A\wedge\sim\neg A$ jelölttel is pont fordított a helyzet, ezek a (B)-ből következnek. Az utolsó jelölt a hamis trilemmából és az előző *catuṣkoṭi*ból ismerős $\sim(A\vee\neg A)$, amelyről már beláttuk, hogy szintén következik (B)-ből.

Felmerülhet, hogy érdemes lenne valamely kettős tagadással gyengíteni (B)-t, hogy ez utóbbi konzekvenciákat elkerüljük, vagy erősíthetnénk (F)-et úgy, hogy (N)-et $\neg A\wedge\sim\neg A$-nek választhassuk. Ez a hozzáállás azonban könnyen pirruszi győzelemre vezet: Ha a (B)-ben lévő

22 Bár a modális operátorra jellemző tulajdonságok eléggé meggyőzőnek tűnnek $\neg\sim$ esetében, a többi fenmmaradó lehetőség is vizsgálatra lehet érdemes.

nem tagadott állítást kettős tagadással erősítenénk, úgy egy (N)-nél tárgyalt „sem-sem" alakú állítást kapnánk, tehát a négy állítás *catuṣkoṭi* mivolta vész oda: nem teljesen világos, hogyan lehetne érvelni amellett, hogy az egyik a (B) és a másik az (N), és nem pedig fordítva.

Az (F) erősítése is némileg a *catuṣkoṭi*tól való eltávolodáshoz vezet, hiszen itt nem egy tagadásról, hanem háromról van szó. A $\sim\sim$ -et elfelejthetjük, mivel ez nem zárja ki (N)-et, de ha a $\Box$ kettős tagadáshoz nyúlunk, akkor ennek használata már könnyebben indokolható: ez az operátor szerepel (T)-nél is, és Priest is modális operátorral fordítja a (F)-et. Az így felállítható *catuṣkoṭi*:

1. (T)	$\Box A$
2. (F)	$\Box\neg A$
3. (B)	$A\wedge{\sim}A$
4. (N)	$\neg A\wedge{\sim}\neg A$

Az (F) kivételével ez elég közel van a szokásos olvasathoz is:

1. (T)	Igaz és hamis, hogy nem igaz
2. (F)	Hamis és hamis hogy nem hamis
3. (B)	Igaz és nem igaz
4. (N)	Hamis és nem hamis

Ezzel a 6. elvárás viszonylag szépen teljesül. Az eddigiekből kiderül, hogy mind a négy állításnak van olyan modellje, amelyben van olyan világ, amelyben igaz, és van olyan modell és világa is, amelyben hamis, tehát az 1.–2. elvárások teljesülnek. A 4. elvárás hiánytalanul teljesül; a kettős tagadások hiearachiájából és a $\neg_{\varepsilon}$ szabályból adódik, hogy itt bármely kettő kölcsönösen kizáró, azaz bármely kettőből következik a $\downarrow$. Az 1. és 4. pontokból az 5., a logikai függetlenség is következik.

A harmadik pont azonban nem teljesül: a 12. ábrán szereplő modellben például a w_5 világban nem igaz egyik állítás sem. A *catuṣkoṭi*ban ez az értékrés befoltozható, ha ezt a tetralemmát a ${\sim}(\Box A \vee \Box\neg A \vee (A\wedge{\sim}A) \vee(\neg A\wedge{\sim}\neg A))$ állítással, az összes kóti kiegészítő-tagadásával pentalemmává egészítjük ki (az így kapott *catuṣkoṭi* ugyanis a ${\sim}_{\varepsilon}$ szabály miatt már kimerítő kell legyen). Ez hasonlít Priest ötértékű szemantikájához, amellyel Nāgārjuna és a kései buddhizmus *catuṣkoṭi*hoz való viszonyát modellezi. Az így kapott pentalemma azonban már elveszíti azt a tulajdonságát, hogy az állításai páronként kizárják egymást. Speciálisan a kótikra ez azonban továbbra is érvényes marad.

ÖSSZEGZÉS

Először bemutattuk, hogy a modális logika alkalmas a *catuṣkoṭi* formalizálására, ha azt a Priest-féle formában értelmezzük. Azonban – ahogy Priest többértékű megközelítésében is – az általunk prezentált modális fordításban is látható volt, hogy a T-séma legkisebb jelenléte is tönkreteszi ezt a fajta megoldást.

Másodszor, erre válaszként bemutattuk két korábbi formalizálási koncepció egyesítését: Staal intuicionista megközelítését ötvöztük Westerhoff két negációt értelmező megközelítésével. A keresett duális intuicionista logika a strukturalista megalapozás során adódik, így a minimális strukturalista alapokat is bemutattuk. Ezzel azt is megválaszoltuk, hogy az általunk később a *catuṣkoṭi* formalizálására használt logika milyen viszonyban van a klasszikus logikával: pontosan a két negációszerep (a kölcsönös kizárás és az együttes kiegészítés) azonosításának kérdése az, ami a logikánkat a klasszikus logikától megkülönbözteti.

A strukturalista megalapozási lépésekből a Lawvere-kalkulus képében egy levezetési rendszert adtunk meg, amelyhez később egy modális szemantikát is bemutattunk. Ezek segítségével bemutattuk, hogy a kettős tagadások milyen modalitásként viselkednek, továbbá olyan állításokat bizonyítottunk be, amelyek a kótik függetlenségének bizonyításához szükségesek.

Végül pedig két *catuṣkoṭi*t mutattunk be: Az első a Priest-féle trükköt nélkülözi, tehát amely az állításokat és tagadásokat csak így, és nem „állító nemtagadásokként" és „tagadó nemállításokként" értelmezi. Ez, bár nem mentes a redundanciától, de mentes az ellentmondásoktól, így jobb formalizmusnak mondható, mint a Staal-i és Westerhoff-i megoldás.

A második *catuṣkoṭi* kétféle értelemben is Priest módszeréhez hasonló: Egyfelől az állítást kettős tagadással együtt érti, amellyel így jóval erősebb kóti is nyerhető, másfelől pedig, mivel a kettős tagadások modalitásként viselkednek, szintén a kótik modális közelítésének tekinthető. Ez a második *catuṣkoṭi* viszont már páronként kizáró kótikat tartalmaz úgy, hogy ugyanakkor mindegyik kóti lehetséges. Mint modális megközelítés, abban mindenképpen figyelemreméltó Priest megközelítéséhez képest, hogy ez tudja a T-séma egyik irányát, a modális logikai **T**-sémát, de még olyan erős alethikus sémákat is, mint amilyen a **B**. A 4 séma levezetésére pedig bár nem képes a Lawvere-kalkulus, de anélkül vehető fel axiómának, hogy az így kapott kalkulus ekvivalenssé váljon a klasszikus logikával. Priest modális operátorainál ezzel szemben, ahogyan azt ő is megjegyzi, a T-séma elfogadása katasztrofális következményekkel jár a kótik függetlenségére és nemürességére nézve.

Egyetlen hátránya a második, páronként független *catuṣkoṭi*nak: A kótik elutasításával kiegészített pentalemmaként fedik csak le a lehetőségek teljes terét. Ez sem érdektelen azonban, mivel az ind logikában a kótik elutasítása sem példa nélküli.

Irodalomjegyzék

CSABA: Csaba Ferenc: *Absztrakt nonszensz? Kategóriaelmélet szemantikai alkalmazásokkal* (kézirat);

DOŠEN 1984: Došen, Kosta: Intuitionistic Negation as a Necessity Operator, in: *Publications de L'Institute Mathématique, Nouvelle série*, Vol 35. (49.), pp. 15–20;

GENTZEN 1935: Gentzen, Gerhard: Investigations Into Logical Deduction, in: *American Philosophical Quarterly.* Vol 1., No. 4., 1964 (1935), pp. 288–306;

GOLDBLATT 1984: Robert Goldblatt: *Topoi*. Mineola, NY: Dover Books on Mathematics.

GORÉ 2000: Rajeev Goré: Dual Intuitionistic Logic Revisited. In: *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, pp. 252–267. Berlin–Heidelberg: Springer.

LAWVERE 2006: William Lawvere: Adjointness in Foundation. In: *Reprints in Theory and Applications of Categories*, No. 16, pp. 1–16.

MOLNÁR 2013: Molnár Attila: Tagadás és dualitás. In: *Nehogy érvgyűlölők legyünk.* (Szerk: Zvolenszky et al.) Budapest: L'Harmattan.

PRIEST 2010: Priest, Graham: The Logic of the Catuṣkoṭi. In: *Comparative Philosophy*, Vol. 1, No. 2, 2010. pp. 24–54.

RAUSZER 1980. Rauszer, Cecylia: An algebraic and Kripke-style approach to a certain extension of intuitionistic logic. In: *Dissertationes Mathematicae*. Vol. 167. Warsaw: Polish Academy of Sciences.

REYES–ZOLFAGHARI 1996: Reyes, Gonzalo E. *és* Zolfaghari, Houman: Bi-Heyting Algebras, Toposes and Modalities. In: *Journal of Philosophical Logic*, Vol. 25, No. 1, 1996. pp. 25–43.

REYES–REYES–ZOLFAGHARI 2004: Reyes, Marie La Palme és Reyes, Gonzalo E. *és* Zolfaghari, Houman: *Generic Figures and their glueings. A constructive approach to functor categories*. Milano: Polimetrica.

SHRAMKO 2005: Yaroslav Shramko: Dual Intuitionistic Logic and a Variety of Negations: The Logic of Scientific Research. In: *Studia Logica: An International Journal for Symbolic Logic,* Vol. 80, No. 2/3, Negation in Constructive Logic (Jul. – Aug., 2005), pp. 347–367

STAAL 1975: Staal, Johan Frederik: *Exploring Mysticism. A Methodological Essay.* Penguin Books. Berkeley: University of California Press.

URBAS 1996: Igor Urbas: Dual-Intuitionistic Logic. In: Notre Dame J. Formal Logic. Vol. 37., Number 3, pp. 440–451.

WESTERHOFF 2010: Westerhoff, Jan: Nāgārjuna's Metaphysics: a Philosophical Introduction. Oxford.